

Série 1

Exercices

Exercice 1 Soit a, b deux réels strictement positifs. On pose pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

1. Prouver que N est une norme. 2. Dessiner la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 1.
3. Déterminer le plus petit réel $p > 0$ tel que $N \leq p\|\cdot\|_2$ et le plus petit réel $q > 0$ tel que $\|\cdot\|_2 \leq qN$. ($\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 2 $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients réels et de degré $n \leq 2$. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ donné par $P(x) = ax^2 + bx + c$:

$$\|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|, \text{ et } \|P\| = \max\{|a|, |b|, |c|\}$$

1. Montrer que ces deux normes sont équivalentes. 2. Calculer la norme de l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}_2[X], \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}_2[X], \|\cdot\|_\infty)$ puis celle de l'application linéaire $Id : (\mathbb{R}_2[X], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}_2[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 3 $\mathbb{R}[X]$ désigne l'anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels et $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme de $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4 $E = M_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n . Pour tout $A = (a_{ij}) \in E$, on pose

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

Vérifiez que l'on définit bien une norme sur E , puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est à dire qu'elle vérifie :

$$N(AB) \leq N(A).N(B), \forall (A, B) \in E^2.$$

Exercice 5 Si E désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs réelles, on définit, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$. Nous avons établi en cours que E muni de cette norme est un espace de Banach. On introduit sur E une nouvelle norme notée $\|\cdot\|_2$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\|f\|_2 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$$

Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme puis montrer que E muni de cette norme n'est pas complet. On considérera, par exemple, pour $n \geq 2$ la suite $(f_n)_n$ de fonctions définies sur $[-1, 1]$ par $f_n(x) = 0$ si $x \in [-1, -1/n]$, $f_n(x) = 1$ si $x \in [1/n, 1]$ et sur $[-1/n, 1/n]$ on prendra la fonction affine qui assure la continuité en $-1/n$ et en $1/n$.

Exercice 6 Si E désigne l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$ à valeurs réelles, on définit, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$. Nous savons que E muni de cette norme est un espace de Banach. On considère le sous-espace $F \subset E$ des applications de classe C^1 . L'objectif est de montrer que F muni de la norme précédente n'est pas complet grâce à un contre exemple. On définit la suite $(f_n)_n$ dans F par :

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n+1} + x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction g que l'on précisera.
2. Montrer que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy (au sens de la norme que l'on a choisie).
3. Conclure que l'espace F n'est pas complet.

Exercice 7 L'objectif de cet exercice est de munir l'espace F de l'exercice précédent d'une nouvelle norme pour laquelle il sera complet. On pose pour tout $f \in F$,

$$\|f\|_2 = \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)| + |f(0)|.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy.
- 2a. Montrer que la suite des dérivées converge uniformément vers une fonction ψ .
- 2b. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction ψ que l'on déterminera.
- 2c. Conclure que l'espace est complet pour cette norme.

Exercice 8 $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels. On pose, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\|P\| = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|.$$

On considère l'application linéaire φ à valeurs réelles et définie pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^n k a_k, \text{ si } P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

En vous inspirant d'un exercice similaire traité en cours, montrer que cette application n'est pas continue.

Corrigé série 1

Corrigé 1 (Ex1) 1. Pour l'inégalité triangulaire, on élève au carré (deux fois) et on obtient une identité remarquable de la forme $(A - B)^2$ qui est positive. Les autres points sont faciles à établir.

2. Pour cette norme, la boule unité est l'intérieur de l'ellipse d'équation $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 1$.
3. On vérifie que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $N(x, y) \leq \max(a, b) \|(x, y)\|_2$ et que

$$\|(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{\min(a, b)} N(x, y).$$

D'autre part, si on suppose par exemple que $\max(a, b) = a$, alors pour le vecteur $(1, 0)$, on a $N(1, 0) = |a|$ et $\|(1, 0)\|_2 = 1$ et par suite $N(1, 0) = a \cdot \|(1, 0)\|_2$. Ainsi, $\max(a, b)$ est le plus petit p tel que $N \leq p \cdot \|\cdot\|_2$.

De même, si on suppose que $a = \min(a, b)$, on remarque que $N(1, 0) = a$ et $\frac{1}{a} \|(1, 0)\|_2 = \frac{1}{a}$. Par conséquent, $q = \frac{1}{\min(a, b)}$ est le plus petit réel q tel que $\|\cdot\|_2 \leq q \cdot N$.

Corrigé 2 (Ex2) 1. Si $P(x) = ax^2 + bx + c$, on a $|P(x)| \leq |a|x^2 + |b|x + |c| \leq |a| + |b| + |c|$, $\forall x \in [0, 1]$. Par suite, on a : $\|P\|_\infty \leq |a| + |b| + |c| \leq 3 \max(|a|, |b|, |c|) = 3\|P\|$.

On a également, $P(1) = a + b + c$, $P(0) = c$ et $P(1/2) = a/4 + b/2 + c$. On peut calculer a , b et c en fonction de $P(0)$, $P(1)$ et $P(1/2)$. On obtient :

$$a = -4P(1/2) + 2P(1) + 2P(0), \quad b = 4P(1/2) - P(1) - 3P(0) \text{ et } c = P(0).$$

D'où $|a| \leq 8\|P\|_\infty$, $|b| \leq 8\|P\|_\infty$ et $|c| \leq \|P\|_\infty$ et on obtient $\|P\| \leq 8\|P\|_\infty$.

2. Lorsque $a = b = c \in \mathbb{R}_+$, on a $\|P\|_\infty = P(1) = a + b + c = 3 \max(a, b, c) = 3\|P\|$. Par conséquent, 3 est le plus petit réel tel que $\|P\|_\infty \leq 3\|P\|$, pour tout P dans notre espace. Ainsi, la norme de la première application est 3.

Pour la seconde norme cherchée, on peut remarquer que si $a = 8$, $b = -8$ et $c = 1$, pour le polynôme associé P , on aura $\|P\| = 8$ et $\|P\|_\infty = 1$ et par suite $\|P\| = 8\|P\|_\infty$. La norme de la seconde application est donc 8.

Corrigé 3 (Ex3) Si la partie A est finie, on peut poser $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ avec n entier convenable. Le polynôme P défini par $P(x) = \prod_{k=1}^n (x - a_k)$ vérifie $\|P\|_A = 0$ et P n'est pas le polynôme nul. Ainsi, la partie A doit être infinie.

D'autre part, si on veut que $\|P\|_A$ soit un nombre positif fini pour tout polynôme P , la partie A doit être bornée.

Ces deux conditions sont suffisantes pour avoir une norme.

Corrigé 4 (Ex4) Nous allons simplement vérifier que c'est une norme d'algèbre. On se donne deux matrices carrées d'ordre n , $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Leur produit est la matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

On a $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \leq n \cdot \max_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}| \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |b_{kj}|$. On a donc

$$N(C) = n \cdot \max |c_{ij}| \leq n \cdot n \cdot \max_{1 \leq i, k \leq n} |a_{ik}| \cdot \max_{1 \leq k, j \leq n} |b_{kj}| \leq N(A) \cdot N(B).$$

Corrigé 5 (Ex5) 1. Montrons que $\|\cdot\|_2$ définit bien une norme sur $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Si $\int_{-1}^1 |f(x)| dx = 0$, f étant continue, alors $|f|$ est aussi continue, de plus comme elle est positive, son intégrale doit être nulle. Par suite, $|f|$ est la fonction nulle, et f aussi.

L'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$. On écrit : $|(f + g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$ puis on intègre de -1 à 1 .

L'autre propriété ne pose aucune difficulté.

On veut montrer que E muni de la norme $\|\cdot\|_2$ n'est pas complet. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ donnée, on précise que sur l'intervalle $[-1/n, 1/n]$, on a $f_n(x) = \frac{n}{2}x + \frac{1}{2}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la suite $(f_n)_n$ converge dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$ vers une fonction continue f . Nécessairement, la fonction f doit être nulle sur l'intervalle $[-1, -1/n[$ pour tout entier $n \geq 2$. En effet, sinon supposons qu'il existe $x_0 \in [-1, -1/n[$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Fixons $N \geq 2$ tel que $x_0 \in [-1, -1/N[$, alors pour tout $n \geq N$, $x_0 \in [-1, -1/n[$ et la fonction $|f - f_n|$ est continue positive sur $[-1, -1/n[$ avec $|f - f_n|(x) = |f(x)|$ pour tout $x \in [-1, -1/n[$. On a aussi $\int_{-1}^1 |(f - f_n)(x)| dx \geq \int_{-1}^{-1/n} |(f - f_n)(x)| dx = \int_{-1}^{-1/n} |f(x)| dx = \alpha > 0$ où $\alpha > 0$ est un réel fixé dépendant de f .

Or, la suite converge vers f , donc $\|f - f_n\|_2$ doit tendre vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais $\|f - f_n\|_2 \geq \int_{-1}^{-1/n} |(f - f_n)(x)| dx = \alpha > 0$ ce qui est une contradiction.

De la même manière, on peut montrer que la fonction f doit être égale à 1 sur $]1/n, 1]$ pour tout $n \geq 2$. Par conséquent, f est nulle sur $[-1, 0[$ et vaut 1 sur $]0, 1]$ et n'aurait pas de limite en 0, ainsi elle ne peut être continue en 0 et donc ne peut appartenir à E ce qui est une contradiction. L'espace n'est donc pas complet pour la norme $\|\cdot\|_2$.

Corrigé 6 (Ex6) $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme du sup, on considère $F \subset E$ le s.e.v. des applications de classe C^1 . On veut montrer que F muni de la norme du sup n'est pas complet.

1. La suite donnée converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto |x|$.
2. Elle est de Cauchy. En effet, si on suppose $n \geq p$:

$$|(f_n - f_p)(x)| = \left| \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + x^2} + \sqrt{\frac{1}{p+1} + x^2}} \right| \leq \left| \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}} + \sqrt{\frac{1}{p+1}}} \right| \leq \frac{\frac{1}{p+1}}{\sqrt{\frac{1}{p+1}}} = \sqrt{\frac{1}{p+1}}.$$

On aura donc $|(f_n - f_p)(x)| \leq \varepsilon$, si $n \geq p \geq N_\varepsilon$.

3. La suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E (qui est complet pour la norme du sup), elle tend vers une limite dans E qui est forcément la fonction $x \mapsto |x|$, mais cette fonction n'étant pas dérivable en 0, elle ne peut appartenir à F . La suite donnée ne converge donc pas dans F qui n'est pas complet pour la norme du sup.

Corrigé 7 (Ex7) Dans le sous espace F de l'exercice précédent, on définit la norme $\|\cdot\|_2$ par $\|f\|_2 = |f(0)| + \sup_{x \in [-1, 1]} |f'(x)|$, pour tout $f \in F$.

1. C'est bien une norme. Si f vérifie $\|f\|_2 = 0$, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$ et $|f(0)| = 0$. La première égalité implique que la fonction f est constante et la seconde que cette constante est nulle, ainsi f est la fonction nulle. Les autres points à vérifier ne posent pas de problème particulier.

2. On se donne une suite de Cauchy pour cette norme.

2a. Les dérivées sont des fonctions continues et sont donc des éléments de $E = C([-1, 1], \mathbb{R})$. La suite (f'_n) est donc de Cauchy dans E pour la norme du sup. E étant complet pour cette norme, la suite (f'_n) converge vers une fonction $\phi \in E$.

2b. On a : $|f_n(x) - f_p(x)| \leq |f_n(0) - f_p(0)| + \sup_{\alpha \in [-1, 1]} |f'_n(\alpha) - f'_p(\alpha)|$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Ceci provient du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f_n - f_p$ entre 0 et x , puis d'une majoration. On déduit que $\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f_p(x)| < \varepsilon$ si n, p sont supérieurs à un entier convenable. Par suite, la suite $(f_n)_n$ converge dans E pour la norme du sup vers une fonction notée ψ .

3. Remarquons d'abord que la suite de réels $(f_n(0))_n$ est de Cauchy et qu'elle converge donc vers un réel noté l . On définit la fonction ψ sur $[-1, 1]$ par $\psi(x) = \int_0^x \phi(t)dt + l$, ψ est donc dérivable avec $\psi(0) = l$ et $\psi' = \phi(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Vérifions que la suite $(f_n)_n$ converge vers ψ pour la norme $\|\cdot\|_2$:

$$\begin{aligned} \|f_n - \psi\|_2 &= \sup_{x \in [-1, 1]} (|f'_n - \psi'|)(x) + |f_n(0) - \psi(0)| \\ &= \sup_{x \in [-1, 1]} (|f'_n - \phi|)(x) + |f_n(0) - l| < \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon, \text{ si } n \text{ est assez grand.} \end{aligned}$$

La fonction ψ est dérivable de dérivée ϕ continue, elle est donc bien élément de F qui est donc complet pour la norme utilisée.

Corrigé 8 (Ex8) L'application donnée est linéaire par construction. Si $P_n(x) = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(P_n) = n$. D'autre part les polynômes P_n sont tous des éléments de la boule unité puisque $\|P_n\| = \sup_{x \in [0, 1]} |P_n(x)| = 1$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on a bien que l'application φ n'est pas bornée sur la boule unité. Elle n'est par conséquent pas continue.

Série 2

Exercice 9 A est une partie non vide d'un espace métrique (E, d) . Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A convergente vers x .

Exercice 10 d étant une distance sur $\mathbb{R}$, soit $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ un homéomorphisme. On définit une nouvelle distance δ par

$$\delta(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

1. Vérifier que δ est bien une distance sur $\mathbb{R}$. 2. Montrer qu'elle est topologiquement équivalente à la distance d . C'est à dire que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ et inversement. 3. Dédurre que les deux distances suivantes définies par

$$d_1(x, y) = |x - y|, \text{ et } d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$$

sont topologiquement équivalentes. Sont elles comparables ?

Exercice 11 1. Soit (E, d) un espace métrique et d_1 une autre distance sur E . On suppose que d et d_1 sont comparables. Montrer que d et d_1 sont topologiquement équivalentes.

2. (E, d) désignant un espace métrique, on définit deux nouvelles distances δ_1 et δ_2 par

$$\delta_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \text{ et } \delta_2(x, y) = \inf\{1, d(x, y)\}.$$

Montrer que les deux distances δ_1 et δ_2 sont topologiquement équivalentes à d . Les distances δ_1 et δ_2 sont elles comparables ?

Exercice 12 Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $x \in E$ et toute partie non vide $A \subset E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

1. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$, puis que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
2. Montrer que, pour A fixé, l'application $f : x \mapsto f(x) = d(x, A)$ est continue sur E .
3. Soient A et B deux parties de E . Montrer que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ si et seulement si il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. (Considérer l'application $(x \mapsto d(x, A) - d(x, B))$).
4. Soient A et B deux fermés disjoints de E . Montrer qu'il existe une application continue $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ égale à 0 sur A et à 1 sur B . En déduire qu'il existe un ouvert U contenant A et un ouvert V contenant B disjoints.

Exercice 13 Suite exhaustive de compacts associée à un ouvert.

Dans cet exercice, on se donne un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ et on veut construire une suite $(K_n)_n$ de compacts contenus dans Ω et telle que $K_n \subset K_{n+1}$, $\bigcup_n K_n = \Omega$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe n tel que $K \subset K_n$.

On pose, pour tout $n \geq 1$, $K_n = \{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \cap \overline{B}_n$, où $\overline{B}_n$ désigne la boule fermée de $\mathbb{R}^p$ de centre 0 et de rayon n . Remarquer que les K_n sont tous non vides à partir d'un certain rang.

Montrer, en utilisant l'exercice précédent, que les K_n conviennent. Expliquer pourquoi on a utilisé l'adjectif "exhaustive".

Exercice 14 $C([0, 1])$ désigne l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur $[0, 1]$ muni de la distance de la convergence uniforme. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On rappelle qu'une fonction $f \in C([0, 1])$ est dite k -lipschitzienne si, pour tous x et $y \in [0, 1]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

1. Montrer que l'ensemble F_k des fonctions k -lipschitziennes est un fermé de $C([0, 1])$.
 2. Montrer que l'ensemble F des fonctions lipschitziennes éléments de $C([0, 1])$ est d'intérieur vide. (On peut supposer qu'il existe une boule ouverte $B(f, r) \subset F$, et on montrera que l'application $x \mapsto f(x) + \frac{r}{2}\sqrt{x}$ est élément de cette boule sans être lipschitzienne. On aura remarqué que la différence entre deux applications lipschitziennes doit être lipschitzienne.)
 3. Soit $f \in C([0, 1])$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux définie par

$$f_n(x) = f(i/n) + (nx - i)(f((i+1)/n) - f(i/n)), \text{ si } x \in [i/n, (i+1)/n], \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n \in F$ et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f . En déduire que F est dense dans $C([0, 1])$.

Exercice 15 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle.

1. Montrer que T est continue si et seulement si $\text{Ker}(T)$ est un fermé. 2. Montrer que si T n'est pas continue alors $\text{Ker}(T)$ est dense dans E .

Exercice 16 Espace complet et continuité uniforme.

(X, d) et (Y, δ) sont deux espaces métriques donnés et $f : X \rightarrow Y$ une application.

1. Montrer que si f est uniformément continue et si $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy dans X alors $(f(u_n))_n$ est une suite de Cauchy dans Y . Que peut-on dire de la réciproque ?
 2. On suppose que f est un homéomorphisme uniformément continu, établir que si Y est complet alors X est complet.

Exercice 17 ℓ^∞ désigne l'espace vectoriel des suites réelles bornées, on le munit de la norme du sup, c'est à dire que si $(u_n)_n \in \ell^\infty$, on pose $\|(u_n)_n\|_\infty = \sup_n |u_n|$. Soit $E \subset \ell^\infty$ le sous espace vectoriel (s'en convaincre!) des suites périodiques à partir d'un certain rang. (On dit qu'une suite $(u_n)_n$ est périodique à partir d'un certain rang s'il existe deux entiers N et T non nuls tels que $u_{n+T} = u_n$ pour tout $n \geq N$.)

1. On veut montrer que l'espace métrique $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est complet. On se donne une suite de Cauchy dans ℓ^∞ , c'est à dire une suite de suites notée $((u_i)_n)_i$ qui est de Cauchy. On précise que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(u_i)_n$ est un élément de ℓ^∞ .

1a. On suppose donc que $\sup_n |u_n^l - u_n^k| < \varepsilon$ si $k, l \geq N_\varepsilon$. Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite de nombres réels $(u_n^i)_i$ converge vers un certain réel noté ℓ_n .

1b. En faisant tendre k vers $+\infty$, montrer qu'on a

$$\sup_n |u_n^l - \ell_n| < \varepsilon, \text{ si } l \geq N_\varepsilon \text{ puis conclure.}$$

2. Soit $T : E \rightarrow E$ l'application définie par :

$$T(u_0, u_1, \dots) = (0, \frac{u_0 + 1}{2}, \frac{u_1 + 1}{2}, \dots).$$

Montrer que T est contractante puis déduire que E n'est pas un fermé de ℓ^∞ .

Corrigé série 2

Corrigé 9 (Ex1) On suppose $x \in \overline{A}$, alors toute boule de centre x et de rayon $r > 0$ quelconque intersecte A , c'est à dire contient un élément de A . On prend r de la forme $1/n$, où $n \geq 1$ est un entier quelconque. La boule $B(x, 1/n)$ contient un élément de A qu'on note x_n , on obtient ainsi une suite d'éléments de A qui converge vers x .

Inversement, si x est la limite d'une suite $(x_n)_n$ dans A alors quelle que soit la boule $B(x, \varepsilon)$ de rayon $\varepsilon > 0$ quelconque, cette boule contient tous les x_n si n est assez grand, elle contient par conséquent au moins un élément de A et donc $x \in \overline{A}$.

Corrigé 10 (Ex2) 1. δ est bien une distance. La première propriété découle de l'injectivité de f , la deuxième propriété est évidente et la dernière découle de l'inégalité triangulaire appliquée à la distance d .

2. Montrons que tout ouvert O pour δ est un ouvert pour d . Il suffit de montrer que si $B_\delta(x, r)$ est une boule ouverte pour δ centrée en $x \in O$ quelconque et de rayon r , elle contient une boule $B_d(x, R)$ où R est un réel positif convenable. On sait que $f : (\mathbb{R}, d) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ est un homéomorphisme, pour $B_d(f(x), r)$, il existe un réel $R > 0$ tel que $f(B_d(x, R)) \subset B_d(f(x), r)$. Ainsi, si $y \in B_d(x, R)$ alors $f(y) \in B_d(f(x), r)$, c'est à dire $d(f(x), f(y)) < r$ ou bien $\delta(x, y) < r$. Ceci signifie qu'on a : $B_d(x, R) \subset B_\delta(x, r)$. Tout ouvert pour δ est donc un ouvert pour d .

Pour montrer que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ , on procède de la même manière en utilisant cette fois-ci la continuité et la bijectivité de l'application f^{-1} .

3. Pour justifier que les deux distances d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes il suffit de remarquer que l'application $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Ces deux distances ne sont pas comparables car il n'existe pas de réel positif α pour lequel on a $d_2(x, y) \leq \alpha d_1(x, y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En effet, par l'absurde, on prend alors $x > 0$ et $y = 0$, on aura : $x^3 \leq \alpha x$ ceci $\forall x > 0$, ce qui est une contradiction.

Corrigé 11 (Ex3) 1. Si d et d_1 sont comparables, ceci équivaut à l'existence de deux réels $0 < a < b$ tels que $a.d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq b.d(x, y)$, pour tout couple $(x, y) \in E^2$. On peut déduire qu'on a les inclusions suivantes :

$$B_d(x, r) \subset B_{d_1}(x, br), \text{ et } B_{d_1}(x, r) \subset B_d(x, r/a), \text{ pour tout } x, \text{ et tout } r > 0.$$

Ainsi, toute boule, pour l'une des distances, centrée en x contient une boule convenable pour l'autre distance centrée aussi en x . Les deux distances sont donc topologiquement équivalentes.

2. Montrons d'abord que d et δ_1 sont topologiquement équivalentes. On peut remarquer que $\delta_1(x, y) \leq d(x, y)$ pour tout couple $(x, y) \in E^2$. Par conséquent, on a $B_d(x, r) \subset B_{\delta_1}(x, r)$ pour tout $x \in E$ et tout réel $r > 0$. Cela assure que tout ouvert pour δ_1 est un ouvert pour d . Il reste à montrer la réciproque. Pour $R > 0$, on cherche par exemple un réel R' tel que si $\delta_1(x, y) < R'$ alors $d(x, y) < R$ car cela impliquera que $B_{\delta_1}(x, R') \subset B_d(x, R)$ et donc que tout ouvert pour d est un ouvert pour δ_1 . Il suffit de poser $R' = \frac{R}{1+R}$.

Montrons, à présent, que δ_1 et δ_2 sont topologiquement équivalentes. On a $B_{\delta_2}(x, r) \subset B_{\delta_1}(x, r)$ si $r < 1$. (Si $\delta_2(x, y) < r < 1$, alors $d(x, y) < r$ et par suite $\delta_1(x, y) < d(x, y) < r$.) Tout ouvert pour δ_1 est un ouvert pour δ_2 . Inversement, on se donne $B_{\delta_2}(x, r')$ et on suppose que $r' < 1$ pour lequel on va chercher une boule convenable pour δ_1 . Vérifions que si $\delta_1(x, y) < r'/2$ alors $\delta_2(x, y) < r'$.

En effet, si $\delta_1(x, y) < r'/2$, on a $d(x, y) < \frac{2r'}{1-r'} < r' < 1$ et donc $\delta_2(x, y) < r'$. On a donc montré qu'on a $B_{\delta_1}(x, r'/2) \subset B_{\delta_2}(x, r')$, elles sont donc topologiquement équivalentes.

Il reste à étudier si δ_1 et δ_2 sont comparables. On a clairement, $\delta_1(x, y) \leq d(x, y)$ et $\delta_1(x, y) \leq 1$, d'où $\delta_1(x, y) \leq \inf\{1, d(x, y)\} = \delta_2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. D'autre part, si $d(x, y) \leq 1$, on a $\delta_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)} \geq \frac{1}{2} \inf\{1, d(x, y)\}$ et si $d(x, y) \geq 1$, on a $\delta_1(x, y) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \inf\{1, d(x, y)\}$. Dans les deux cas, on a vérifié qu'on a $\delta_1(x, y) \geq \frac{1}{2} \delta_2(x, y)$. Les deux distances sont donc comparables.

Corrigé 12 (Ex4) 1. D'après l'exercice 1, $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite de points $(x_n)_n$ de A telle que $d(x, x_n) \leq 1/n$. On a donc $\inf d(x, A) = 0$. Si cette borne inférieure est nulle, on a pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$. C'est à dire que toute boule $B(x, \varepsilon)$ intersecte A et donc $x \in \overline{A}$.

Montrer à présent que pour tout $x \in E$, on a $d(x, A) = d(x, \overline{A})$. Puisque $A \subset \overline{A}$, on a $d(x, A) \geq d(x, \overline{A})$. On a forcément l'égalité, sinon supposons $d(x, A) > d(x, \overline{A})$, il existe donc $\alpha \in \overline{A}$ tel que $d(x, \overline{A}) \leq d(x, \alpha) < d(x, A)$. Pour tout $a \in A$, d'après l'inégalité triangulaire, on a $d(\alpha, a) + d(\alpha, x) \geq d(x, a)$. D'où, pour tout $a \in A$, $d(\alpha, a) \geq d(x, a) - d(\alpha, x)$, et donc $d(\alpha, A) \geq d(x, A) - d(\alpha, x) > 0$. C'est une contradiction car cela signifie que α n'est pas un point adhérent.

2. Pour toute partie non vide A fixée, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue car elle est lipschitzienne : Elle vérifie $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$.

3. Pour tout $x \in A$, si on note $g(x) = d(x, A) - d(x, B)$, on a $g(x) \leq 0$. De plus, puisque $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, d'après ce qui a précédé, $d(x, B) > 0$ et donc $g(x) < 0$. De même, pour tout $x \in B$, on a $g(x) > 0$. L'application g étant continue comme différence entre deux fonctions continues, $g^{-1}(]-\infty, 0])$ est un ouvert contenant A et $g^{-1}(]0, +\infty])$ est un ouvert contenant B . Le premier ouvert convient pour U et le deuxième pour V .

4. Remarquons d'abord que si A et B sont des fermés disjoints, on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ et par suite, pour tout $x \in E$, on a $d(x, A) + d(x, B) > 0$. Si h désigne l'application $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{1}{d(x, A) + d(x, B)}$ alors h est bien définie. De plus, elle est continue comme composée de " $x \mapsto d(x, A) + d(x, B)$ " avec " $x \mapsto 1/x$ ". Si on considère l'application $k : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$k(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

elle est continue sur E et elle vaut 0 sur A et 1 sur B . On peut alors poser $U = k^{-1}(] - 1/2, 1/2])$ puis $V = k^{-1}(]1/2, 3/2])$.

Corrigé 13 (Ex5) Si f désigne l'application " $x \mapsto d(x, \Omega^c)$ ", f étant continue, $\{x \in \Omega, d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} = f^{-1}([\frac{1}{n}, +\infty])$ est un fermé pour tout entier $n \geq 1$, par suite K_n est fermé car intersection de deux fermés. Comme $K_n \subset \overline{B}_n$ et que la boule $\overline{B}_n$ est bornée, K_n est aussi borné et par suite, K_n est un compact de $\mathbb{R}^p$.

Montrons que $K_n \subset K_{n+1}$. Soit $x \in K_n$, puisque $d(x, \Omega^c) > \frac{1}{n+1}$ et f est continue, il existe donc un ouvert O_x contenant x tel que $\forall y \in O_x$, on a $f(y) > \frac{1}{n+1}$. D'autre part, comme $x \in \overline{B}_n$, x appartient à l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}_{n+1}$, qui est la boule ouverte. Il existe un ouvert O'_x tel que $O'_x \subset \overline{B}_{n+1}$. On vérifie alors que $O_x \cap O'_x$ est un ouvert contenant x et contenu dans K_{n+1} . On a donc bien $K_n \subset K_{n+1}$.

On vérifie à présent que $\bigcup_n K_n = \Omega$. Soit $x \in \Omega$, il existe n assez grand tel que $d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}$ et d'autre part, il existe un entier m assez grand tel que $x \in \overline{B}_m$. Si on pose $k = \max\{n, m\}$, alors on aura $x \in K_k$.

L'adjectif "exhaustive" signifiant "complète" a été utilisé pour souligner que la suite de compacts $(K_n)_n$ recouvre la totalité de l'ouvert Ω .

Corrigé 14 (Ex6) 1. L'ensemble F_k des fonctions k -lipschitziennes est fermé : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions k -lipschitziennes convergeant vers f dans l'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$. On a pour tout entier n et pour tout couple $(x, y) \in [0, 1]^2$, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq k|x - y|$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ et donc la limite f est aussi k -lipschitzienne.

2. Supposons qu'il existe une boule $B(f, r)$ contenu dans l'ensemble des fonctions lipschitziennes. Si on considère la fonction ϕ donnée par " $x \mapsto f(x) + \frac{r}{2}\sqrt{x}$ ", cette fonction appartient à la boule considérée, en effet, $\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - \phi(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} \frac{r}{2}\sqrt{x} = \frac{r}{2} < r$. On rappelle que la fonction " $x \mapsto \sqrt{x}$ " n'est pas lipschitzienne tout simplement car le rapport $\frac{\sqrt{x}-0}{x-0}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 0^+ et que la différence entre deux applications lipschitziennes est aussi lipschitzienne. Ainsi, l'application $f - \phi$ devrait être lipschitzienne ce qui est faux, d'où une contradiction. L'ensemble des fonctions lipschitziennes est donc d'intérieur vide.

3. Montrons la densité des fonctions lipschitziennes dans l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ muni de la norme du sup. On se donne donc $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ et la suite $(f_n)_n$ de fonctions proposée dans cette question. Remarquons d'abord que chaque f_n est lipschitzienne sur l'intervalle $[i/n, (i+1)/n]$, pour $0 \leq i \leq n-1$ avec pour constante associée $n|f((i+1)/n) - f(i/n)|$. Soient x, y quelconques dans $[0, 1]$, supposons par exemple $x < y$, $x \in [i/n, (i+1)/n]$ et $y \in [j/n, (j+1)/n]$ avec $i < j$.

On décompose : $|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(j/n)| + \dots + |f((i+1)/n) - f(x)|$.

Si on pose $M = \max_{0 \leq i \leq n-1} n|f((i+1)/n) - f(i/n)|$, alors on a : $|f(y) - f(x)| \leq M(|y - j/n| + |j/n - (j-1)/n| + \dots + |(i+1)/n - x|) \leq M|y - x|$. Ainsi f_n est lipschitzienne pour tout $n \geq 1$.

Si on montre que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f , alors toute boule centrée en f et de rayon quelconque > 0 contiendra un certain élément f_n pour n assez grand.

Remarquons que l'application f est uniformément continue, c'est à dire que $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ si $|x - x'| < \eta$.

Si $x \in [i/n, (i+1)/n]$, on écrit : $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(i/n)| + |f(i/n) - f_n(x)|$. Or, si $1/n < \eta$, puisque $|x - i/n| < 1/n$, on a $|f(x) - f(i/n)| < \varepsilon$. D'autre part, on a $|f(i/n) - f_n(x)| = n(x - i/n)|f((i+1)/n) - f(i/n)| \leq |f((i+1)/n) - f(i/n)| < \varepsilon$. On a donc obtenu : $|f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$ à partir d'un certain rang.

Corrigé 15 (Ex7) 1. Si T est continue alors $\{0\}$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{0\}) = \text{Ker}(T)$ est un fermé. Inversement, on suppose $\text{Ker}(T)$ fermé et on raisonne par l'absurde. Si T n'est pas continue, comme elle est linéaire, elle n'est pas continue en 0, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $(x_n)_n$ qui tend vers 0 mais telle que $|T(x_n)| > \varepsilon_0$. T étant non identiquement nulle, il existe un élément $e \in E$ tel que $T(e) = 1$. On considère alors dans E la suite $(y_n)_n$ donnée par $y_n = e - \frac{x_n}{T(x_n)}$. On vérifie que $T(y_n) = 0$, et donc $y_n \in \text{Ker}(T)$ pour tout n et que y_n tend vers e puisque $\|y_n - e\| < \frac{1}{\varepsilon_0} \|x_n\|$. $\text{Ker}(T)$ étant fermé, la suite $(y_n)_n$ doit converger dans $\text{Ker}(T)$ mais $e \notin \text{Ker}(T)$, d'où une contradiction.

2. On suppose que T n'est pas continue, comme précédemment, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite dans E notée $(x_n)_n$ qui tend vers 0 et telle que $|T(x_n)| > \varepsilon_0$. Soit $y \in E$ quelconque, on veut l'approcher aussi près que l'on veut par un élément de $\text{Ker}(T)$. On pose $T(y) = \alpha$, on a la décomposition : $y = (y - \frac{\alpha}{T(x_n)}x_n) + \frac{\alpha}{T(x_n)}x_n$. L'élément $z_n = y - \frac{\alpha}{T(x_n)}x_n$ vérifie $T(z_n) = 0$ et donc $z_n \in \text{Ker}(T)$ et $\|y - z_n\| = \|\frac{\alpha}{T(x_n)}x_n\| \leq \frac{|\alpha|}{\varepsilon_0} \|x_n\|$ qui tend vers 0.

Corrigé 16 (Ex8) 1. Si f est uniformément continue de (X, d) vers (Y, δ) alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $d(x, y) < \eta$ alors $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy alors pour $\eta > 0$, il existe un entier N_η tel que si $n, m \geq N_\eta$, on a $d(x_n, x_m) < \eta$. Montrons que la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy, pour $\varepsilon > 0$, si $n, m \geq N_\eta$ on aura $d(x_n, x_m) < \eta$ et grâce à la continuité uniforme, on obtient $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$. Si $(f(x_n))_n$ est une suite de Cauchy, la suite $(x_n)_n$ n'est pas nécessairement de Cauchy. Pour $f = \arctan$, f est uniformément continue car elle est lipschitzienne ($|\arctan(x) - \arctan(y)| \leq |x - y|$), et si on prend une suite $(x_n)_n$ qui tend vers $+\infty$, elle n'est pas de Cauchy car elle n'est pas convergente, mais la suite image $(f(x_n))_n$ converge vers $\frac{\pi}{2}$ et elle est de Cauchy.

2. On se donne une suite de Cauchy $(x_n)_n$ dans X , f étant uniformément continue, la suite $(f(x_n))_n$ est de Cauchy dans Y . Y étant complet, la suite $(f(x_n))_n$ converge donc vers une limite l . f^{-1} étant continue, la suite $(f^{-1}(f(x_n)))_n$ qui est $(x_n)_n$ converge donc vers $f^{-1}(l)$. X est donc complet.

Corrigé 17 (Ex9) 1a. Pour tout n fixé quelconque, on a : $|u_n^l - u_n^k| < \varepsilon$ si $k, l \geq N_\varepsilon$. La suite de nombres réels $(u_n^i)_i$ est de Cauchy, elle converge donc vers une limite qui dépend de n notée ℓ_n .

1b. Puisque $|u_n^l - u_n^k| < \varepsilon$ si $k, l \geq N_\varepsilon$, si on fixe l et on fait tendre k vers $+\infty$, par passage à la limite, on obtient $|u_n^l - \ell_n| \leq \varepsilon$ si $l \geq N_\varepsilon$. Ainsi la suite $((u_i)_n)_i$ converge vers la limite $(\ell_n)_n$ qui appartient bien à ℓ^∞ . ($|\ell_n| \leq |u_n^l - \ell_n| + |u_n^l| \leq \varepsilon + M$ où M est un majorant de $\|(u_i)_n\|$.)

2. L'application T est contractante car elle vérifie $\|T((u_n)_n) - T((v_n)_n)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|(u_n)_n - (v_n)_n\|_\infty$.

L'espace E n'est pas fermé car sinon, comme il est dans ℓ^∞ qui est complet, il sera aussi complet. D'après le théorème du point fixe, il existe une suite $(w_n)_n \in E$ pour laquelle on a : $T((w_n)_n) = (w_n)_n$. Or cela implique que $(u_n)_n$ est la suite définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{2}$, or cette suite est strictement croissante et convergente vers 1, elle n'est pas périodique et donc ne peut pas être un élément de E , d'où une contradiction. E n'est donc pas un fermé.

Série 3

Exercice 18 Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ une application vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall (x, y) \in X^2, \quad x \neq y.$$

Le but de cet exercice est de montrer que f admet un point fixe unique $p \in X$.

1. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n \geq 0} X_n$ n'est pas vide. 2. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est 0. 3. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que $\forall x_0 \in X$, la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p lorsque n tend vers ∞ .

Exercice 19 On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble dénombrable dense. L'objectif de cet exercice est de montrer que tout espace métrique compact est séparable.

1. Soit (E, d) un espace métrique compact. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe une suite finie d'éléments de E , $y_1^n, \dots, y_{p_n}^n$ telle que

$$E = \bigcup_{i=1}^{p_n} B(y_i^n, \frac{1}{n}).$$

2. Justifier que l'ensemble $A = \{y_i^n; 1 \leq i \leq p_n, n \geq 1\}$ est dénombrable, puis déduire que quel que soit $\alpha \in E$ et quel que soit le réel $r > 0$, $B(\alpha, r) \cap A$ est non vide.

Exercice 20 L'objectif de cet exercice est de montrer le théorème de Baire : Si (E, d) est un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.

Soit (E, d) un espace métrique complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans E . On veut montrer que quel que soit $\alpha \in E$ et quel que soit $r > 0$, on a $B(\alpha, r) \cap (\bigcap_n O_n) \neq \emptyset$.

1. Soit $x_0 \in O_0 \cap B(\alpha, r)$ et $r_0 > 0 \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset O_0 \cap B(\alpha, r)$. Montrer qu'il existe $x_1 \in O_1$ et un réel $r_1 > 0$ tel que $0 < r_1 < r_0/2$ et $\overline{B}(x_1, r_1) \subset O_1 \cap \overline{B}(x_0, r_0)$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe $x_n \in O_n$ et un réel r_n tel que $0 < r_n < r_{n-1}/2$ vérifiant $\overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n \cap \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$.

3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy.

4. En justifiant votre réponse, trouver un élément de $(\bigcap_n O_n)$ qui appartient à $B(\alpha, r)$ puis conclure. (On peut remarquer que $\forall k \geq n, x_k \in \overline{B}(x_n, r_n)$.)

Exercice 21 Sur la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ordonnée par $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$, on définit un ouvert quelconque (non trivial) O de $\overline{\mathbb{R}}$ comme étant de l'un des types suivants : - Ou bien c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ (lorsqu'il ne contient ni $+\infty$, ni $-\infty$), - Ou bien il est de la forme $]a, +\infty[\cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et a est un réel quelconque (lorsqu'il contient $+\infty$), - Ou bien de la forme $]-\infty, b[\cup O_1$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$ et b est un réel quelconque (lorsqu'il contient $-\infty$), - Ou bien de la forme $]-\infty, b[\cup O_1 \cup]a, +\infty[$, où O_1 est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}$, a et b étant des réels quelconques (lorsqu'il contient à la fois $+\infty$ et $-\infty$).

On peut remarquer que $]-\infty, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$ et $]-\infty, +\infty[$ sont des ouverts de $\overline{\mathbb{R}}$.

<https://keepmath.com>

1. Montrer que ceci définit bien une topologie sur $\overline{\mathbb{R}}$. 2. On se propose de montrer que $\overline{\mathbb{R}}$ muni de cette topologie est compact.

2a. On suppose donné un recouvrement de $\overline{\mathbb{R}}$ par des ouverts $(O_i)_i$ de $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si l'un des ouverts est $]-\infty, +\infty[$ ou bien $]-\infty, +\infty[$ ou bien $]-\infty, +\infty[$, alors il est aisé d'extraire un sous recouvrement fini.

2b. On suppose qu'aucun des ouverts n'est du type précédent, c'est à dire que, pour tout indice i , O_i est ou bien de la forme $]-\infty, a_i[\cup U_i$ avec U_i ouvert de $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $U'_j \cup]b_j, +\infty[$ avec U'_j ouvert de $\mathbb{R}$ ou bien de la forme U''_k avec U''_k ouvert de $\mathbb{R}$.

(i) Justifier que si $\sup a_i = +\infty$ ou bien $\inf b_j = -\infty$ alors il existe un sous recouvrement fini de $\overline{\mathbb{R}}$.

(ii) On suppose que $\sup a_i < +\infty$ et $\inf b_j > -\infty$ et on distingue deux cas : Montrer que si $\sup a_i > \inf b_j$, il existe un sous recouvrement contenant exactement deux ouverts. Dans le cas où $\sup a_i \leq \inf b_j$, montrer que l'intervalle $[\sup a_i, \inf b_j]$ peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts du recouvrement initial puis déduire que $\overline{\mathbb{R}}$ admet un sous recouvrement fini dans ce cas.

Exercice 22 Soit E un espace topologique séparé et A, B deux parties compactes non vides et disjointes. Montrer qu'il existe un voisinage U de A et un voisinage V de B disjoints. On commencera par traiter les cas où B est réduit à un point.

Exercice 23 Soit A une partie compacte et B une partie fermée de $\mathbb{R}$. On pose $C = A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que C est un fermé. 2. Montrer que si B est compact alors C est compact.

Exercice 24 Soit E un espace topologique et F un espace topologique séparé. Soit $p_E : E \times F \rightarrow E$, la projection sur le facteur E .

1a. On rappelle que $E \times F$ est muni de la topologie produit, pour laquelle les ouverts sont les réunions de pavés ouverts, c'est à dire réunions des parties de la forme $U_i \times V_i$, où U est un ouvert de E et V est un ouvert de F . Montrer que la projection p_E est ouverte.

1b. Donner un exemple montrant qu'en général, p_E n'est pas fermée.

1c. Montrer que si F est compact, l'application p_E est fermée.

2a. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On sait que si f est continue, son graphe G est fermé dans $E \times F$. Montrer que si F est compact et si le graphe G est fermé dans $E \times F$, alors f est continue.

Exercice 25 (Facultatif.) Exemple de topologie non métrisable.

On considère le produit infini non dénombrable $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ muni de la topologie produit. On rappelle que les ouverts sont les réunions de pavés ouverts c.a.d. réunions de parties de la forme

$$O = \prod_{x \in \mathbb{R}} O_x$$

où les O_x sont tous égaux à $\mathbb{R}$ sauf pour un nombre fini $x_1, \dots, x_n$ pour lesquels $O_{x_1}, \dots, O_{x_n}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et qu'une application f appartient à ce pavé si et seulement si $f(x_1) \in O_{x_1}, \dots, f(x_n) \in O_{x_n}$.

1. Montrer qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers f au sens de la topologie produit si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. (La suite $(f_n)_n$ converge vers f si pour tout pavé ouvert contenant f , il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $f_n \in O$.) La topologie produit et celle de la convergence simple coïncident.

2. Soit H la partie de E formée par les fonctions $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nulles sauf en un nombre fini de points et soit g la fonction constante égale à 1.

Justifier que g appartient à $\overline{H}$. Pour cela, on montrera que tout pavé ouvert contenant g intersecte H .

3. Montrer qu'il n'est pas possible de trouver une suite de fonctions $(\phi_n)_n$ dans H qui converge vers g . Pour cela, on utilisera la première question et on remarquera que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, \phi_n(x) = 0, \forall n\}$ est non vide. (On rappelle que $\mathbb{R}$ est un espace de Baire, voir exercice 3.). Conclure.

Corrigé série 3

Corrigé 18 (Ex1) 1. La suite donnée est décroissante car on a

$$X_{n+1} = f^{n+1}(X) = f^n(f(X)) \subset f^n(X) = X_n.$$

Vérifions que X_n est compact pour tout entier $n \geq 0$.

C'est vrai pour $n = 0$ car X est compact par hypothèse. On suppose que X_n est compact, puisque f est continue et que l'espace d'arrivée est séparé, l'image $f(X_n)$ du compact X_n est aussi un compact.

Montrons à présent que $Y = \bigcap_n X_n$ est non vide. $(X_n)_n$ est une famille de compacts dont toute sous famille finie est d'intersection non vide. Par une des propriétés des compacts, l'intersection de toute la famille est non vide.

2. Montrons l'égalité $Y = f(Y)$. On a $f(\bigcap_n X_n) \subset \bigcap_n f(X_n)$, d'où l'inclusion $f(Y) \subset Y$. Inversement, soit $\alpha \in Y$, alors α s'écrit sous la forme

$$\alpha = f(\alpha_1) = f^2(\alpha_2) = \dots = f^p(\alpha_p) = \dots$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \dots$ est une suite convenable dans X . Si on considère la suite $(\gamma_p)_p = (f^{p-1}(\alpha_p))_p$, elle admet une valeur d'adhérence λ car X est compact. De plus, comme cette suite se trouve dans X_n , pour tout n , à partir d'un certain rang, par conséquent, une suite extraite convergente vers λ dans X est aussi convergente vers λ dans X_n pour tout n , car X_n est fermé. Ainsi, on a obtenu $\lambda \in Y$. D'autre part, f étant continue, la suite $(\gamma_n)_n$ admettant une suite extraite convergente $(\gamma_{\varphi(n)})_n$ vers λ , la suite $(f(\gamma_{\varphi(n)}))_n$ tend vers $f(\lambda)$ qui est aussi α . Nous avons donc établi que pour tout $\alpha \in Y$, il existe $\lambda \in Y$ tel que $f(\lambda) = \alpha$, d'où l'autre inclusion $Y \subset f(Y)$.

Supposons que $\delta(Y) = \delta(f(Y)) > 0$. Tout d'abord, rappelons que si K est une partie non vide, compacte d'un espace métrique, alors il existe deux éléments k, k' de K tels que $\delta(K) = d(k, k')$. (Ceci est dû au fait que l'application distance est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc elle est bornée sur un compact et atteint ses bornes sur ce compact.)

Ainsi, il existe y_1, y_2 deux éléments de Y tels que $\delta(f(Y)) = d(f(y_1), f(y_2))$. Puisqu'on a $d(f(y_1), f(y_2)) < d(y_1, y_2)$, alors $\delta(Y) \geq d(y_1, y_2) > \delta(f(Y))$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, on a $\delta(Y) = 0$ et Y est réduit à un seul élément noté λ .

3. On a obtenu $Y = \{\lambda\}$ avec $f(\lambda) = \lambda$, c'est donc un point fixe qu'on note aussi p . Il est unique car si on raisonne par l'absurde, on suppose l'existence de deux points fixes $y_0 \neq y_1$, on aboutit à $d(f(y_0), f(y_1)) = d(y_0, y_1) < d(y_0, y_1)$ ce qui est une contradiction. Soit $x_0 \in X$ quelconque, la suite $(f^n(x_0))_n$ est dans le compact X , elle admet donc une valeur d'adhérence qu'on note β . Comme précédemment, cette valeur d'adhérence appartient à Y , c'est donc forcément λ qui est le point fixe unique.

Corrigé 19 (Ex2) 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in E$, on considère la boule $B(y, 1/n)$ et on recouvre E par ces boules pour tout n fixé : $E = \bigcup_{y \in E} B(y, 1/n)$. L'espace E étant compact, il existe un nombre fini de ces boules $B(y_1^n, 1/n), \dots, B(y_{p_n}^n, 1/n)$ telles que : $E = \bigcup_{i=1}^{p_n} B(y_i^n, 1/n)$.

2. L'ensemble $L = \{y_i^n, n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p_n\}$ est dénombrable. On peut, par exemple, proposer la bijection $\psi : L \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $\psi(y_i^1) = i$ pour $1 \leq i \leq p_1$ et $\psi(y_i^n) = \sum_{j=1}^{n-1} p_j + i$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq i \leq p_n$. On peut aussi simplement remarquer que l'ensemble L peut s'écrire sous la forme d'une suite $y_1^1, \dots, y_{p_1}^1, y_1^2, \dots, y_{p_2}^2, \dots, y_1^n, \dots, y_{p_n}^n, \dots$, ce qui justifie aussi qu'il est dénombrable.

Cet ensemble est dense dans E . En effet, soit $\alpha \in E$ quelconque et $B(\alpha, r)$ avec $r > 0$, une boule ouverte quelconque centrée en α . On fixe n assez grand vérifiant $1/n < r$, nous savons qu'il existe i , $1 \leq i \leq p_n$ avec $\alpha \in B(y_i^n, 1/n)$. L'élément y_i^n appartient à la boule $B(\alpha, r)$ et par suite $B(\alpha, r) \cap L \neq \emptyset$. L est donc dénombrable et dense dans E et tout espace métrique compact est séparable.

Corrigé 20 (Ex3) 1. O_1 étant un ouvert dense dans E , on a $\overline{B}(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$, et donc on a aussi $B(x_0, r_0) \cap O_1 \neq \emptyset$. Il existe donc $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ qui est ouvert. Par suite, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \subset \overline{B}(x_0, r_0) \cap O_1$. Quitte à restreindre r_1 , on peut supposer $r_1 < r_0/2$ et $\overline{B}(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_0, r_0) \cap O_1$.

2. On fait de même pour O_n qui est aussi dense. Il existe $x_n \in B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$ et $r_n > 0$ tels que $B(x_n, r_n) \subset B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n \subset \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$ et quitte à restreindre r_n , on peut supposer $r_n < r_{n-1}/2$ et $\overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$.

3. Montrons que la suite $(x_n)_n$ est de Cauchy. D'après ce qui précède, on a : $d(x_n, x_{n+1}) < r_n < r_0/2^n$. On déduit que si $m \geq n$ sont deux entiers, alors $d(x_m, x_n) < r_0(1/2^n + \dots + 1/2^{m-1}) < \varepsilon$ si $n \geq N_\varepsilon$.

4. L'espace étant supposé complet, la suite $(x_n)_n$ est convergente vers une limite l . Puisque pour tout n , $\overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$, alors si $p \geq n$, $x_p \in \overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n$. La limite l appartient à $\overline{B}(x_n, r_n)$ (fermée) et donc appartient à O_n , ceci pour tout $n \geq 1$. Ainsi la limite appartient à $\bigcap_{n \geq 1} O_n$ et puisqu'elle appartient aussi à $O_0 \cap B(\alpha, r)$, elle appartient à $B(\alpha, r) \cap (\bigcap O_n)$ qui est par conséquent non vide.

Corrigé 21 (Ex4) 1. On doit vérifier que toute intersection finie d'ouverts est un ouvert et que toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Comme on a essentiellement 4 types d'ouverts, on les appelle dans l'ordre, ouverts de type I, de type II, de type III ou de type IV.

L'intersection d'un ouvert de type I avec un ouvert d'un autre type donne un ouvert de l'autre type. Le type II avec le III donne le type I, le type II avec le type IV donne le type III et enfin le type III avec le type IV donne le type III. D'autre part, la réunion de deux ouverts de même type est un ouvert du même type. La réunion d'un ouvert de type I avec un ouvert de type II est un ouvert de type II, de type I avec le type III est de type III, de type I avec le type IV est de type IV. Le type II avec III donne le type IV, le type II avec IV donne IV, et enfin le type III avec IV donne le type IV. La famille est donc stable par intersection finie et par union quelconque. Comme cette famille contient $\emptyset$ et $\mathbb{R}$, c'est bien une topologie.

2a. Si l'un des ouverts est $[-\infty, +\infty]$, on garde seulement cet ouvert et c'est un sous recouvrement fini. Si l'un des ouverts est $[-\infty, +\infty[$, on le garde et on choisit parmi les ouverts du recouvrement initial un ouvert qui contient $+\infty$ ce qui donne un sous recouvrement fini avec deux ouverts. On procède de même pour le dernier cas.

2b. (i) On suppose que $\sup a_i = +\infty$, on prend d'abord un ouvert du recouvrement donné qui contient $+\infty$. Cet ouvert contient un intervalle de la forme $]b, +\infty]$ et on choisit un certain a_i qui appartient à $]b, +\infty[$. On ajoute au premier ouvert l'ouvert du recouvrement qui contient l'intervalle $[-\infty, a_i[$ et on aura alors un sous recouvrement fini à deux ouverts. On procède de même pour le cas $\inf b_j = -\infty$.

(ii) Si $\sup a_i > \inf b_j$, il existe deux indices convenables i_0 et j_0 pour lesquels $a_{i_0} > b_{j_0}$, on prend un ouvert du recouvrement initial qui contient $[-\infty, a_{i_0}[$ et un ouvert du recouvrement qui contient $]b_{j_0}, +\infty]$, c'est donc un sous recouvrement fini à deux éléments. Pour le dernier cas, on choisit $a_k < b_l$, l'intervalle $[a_k, b_l]$ est recouvert par le recouvrement initial. On considère un recouvrement de cet intervalle par des ouverts de $\mathbb{R}$ en enlevant à chaque ouvert du recouvrement précédent $-\infty$ si ce dernier appartient à l'ouvert ou $+\infty$ si ce dernier lui appartient. L'intervalle considéré étant fermé et borné, il est compact et on peut extraire un sous recouvrement fini auquel est associée une famille finie des ouverts initiaux (on rajoute $+\infty$ ou $-\infty$ là où ils ont été enlevés). A cette famille d'ouverts, on rajoute enfin un ouvert qui contient $[-\infty, a_k[$ et un ouvert qui contient $]b_l, +\infty]$, d'où un sous-recouvrement fini.

Corrigé 22 (Ex5) On suppose d'abord que $B = \{b\}$ est réduit à un seul élément.

L'espace étant séparé, pour tout $a \in A$, il existe un ouvert $V_b(a)$ contenant a et un ouvert $V_a(b)$ disjoints. On obtient ainsi un recouvrement de A par des ouverts : $A \subset \bigcup_{a \in A} V_b(a)$ dont on peut extraire un sous recouvrement fini : $A \subset O'_b = V_b(a_1) \cup \dots \cup V_b(a_k)$. L'ouvert $O_b = V_{a_1}(b) \cap \dots \cap V_{a_k}(b)$ contient b et on a : $O_b \cap O'_b = \emptyset$.

Si B n'est plus réduit à un seul élément alors on a un recouvrement de B par des ouverts O_b du type précédent : $B \subset \bigcup_{b \in B} O_b$ et pour chaque $b \in B$, il existe un ouvert O'_b contenant A vérifiant $O_b \cap O'_b = \emptyset$. B étant supposé compact, il existe un sous recouvrement fini par des ouverts $O_{b_1}, \dots, O_{b_l}$. Comme ouverts cherchés, on pose $V(B) = O_{b_1} \cup \dots \cup O_{b_l}$ et $U(A) = O'_{b_1} \cap \dots \cap O'_{b_l}$ puis on vérifie qu'ils conviennent.

Corrigé 23 (Ex6) 1. On se donne une suite $(c_n)_n$ de points de C convergente dans $\mathbb{R}$, montrons que cette suite est convergente dans C .

On suppose $c_n = a_n + b_n$ tend vers une limite $\alpha \in \mathbb{R}$. A étant compact, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $l \in A$. On déduit que la suite extraite $(b_{\varphi(n)})_n$ converge vers $l' = \alpha - l$ qui appartient à B car B est fermé. Ceci montre que la limite α s'écrit sous la forme $l + l'$, elle appartient donc à C qui est bien fermé.

2. On suppose que B est un compact (donc fermé et borné), montrons que C est un compact. Comme C est fermé, il suffit de montrer que C est borné. Or A est un compact de $\mathbb{R}$, A est donc borné et la somme de deux bornés est un borné et C est donc compact.

Corrigé 24 (Ex7) 1a. Soit O un ouvert de $E \times F$, O est de la forme $\bigcup_i U_i \times V_i$. On a alors $p_E(O) = \bigcup_i U_i$ qui est un ouvert de E , p_E est donc ouverte.

1b. Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on considère la partie $A = \bigcup_{n \geq 1} [1/n, 1 - 1/n] \times \{n\}$. A est un fermé (on montre sans difficultés que son complémentaire est ouvert), mais sa projection sur le premier facteur est l'intervalle $]0, 1[$ qui n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$.

1c. On suppose que F est compact, montrons que p_E est fermée. Soit C une partie fermée de $E \times F$ et soit x dans le complémentaire de l'image $p_E(C)$, alors pour tout $y \in F$, $(x, y) \notin C$. C étant fermé, il existe un ouvert de $E \times F$, qu'on peut supposer de la forme $U(x) \times V(y)$, tel que $(U(x) \times V(y)) \cap C = \emptyset$. F étant compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de tels ouverts $V(y_1), \dots, V(y_n)$. Si on pose $U' = \bigcap_{i=1}^n U(x_i)$ ($U(x_i)$ étant les ouverts correspondants aux $V(y_i)$), alors l'ouvert $U' \times F$ est contenu dans le complémentaire de C et son image est l'ouvert $U'(x)$ qui est contenu dans le complémentaire de $p_E(C)$. p_E est donc bien fermée dans ce cas.

2. On suppose que le graphe $G \subset E \times F$ de f est fermé et que F est compact, montrons que f est continue. On montre que l'image réciproque d'un fermé est fermé. Soit K un fermé de F , on peut remarquer qu'on a : $f^{-1}(K) = p_E((E \times K) \cap G)$. $E \times K$ est un fermé et G est aussi fermé, et puisque F est compact, l'application p_E est fermée, ainsi $f^{-1}(K) = p_E((E \times K) \cap G)$ est fermé et f est continue.

Corrigé 25 (Ex8) 1. Supposons que la suite $(f_n)_n$ converge vers f . Pour tout ouvert O de la topologie produit contenant f , il existe N tel que si $n \geq N$, alors $f_n \in O$. On a donc : Pour tout pavé ouvert contenant f , $f_n \in \prod_x O_x$ si $n \geq N$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, on veut montrer que $f_n(x_0)$ tend vers $f(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on choisit le pavé, $\prod_x O_x$, avec $O_{x_0} =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ et $O_x = \mathbb{R}$ si $x \neq x_0$. il existe donc un entier N' tel que si $n \geq N'$, on a $f_n \in \prod_x O_x$. En particulier, on aura $f_n(x_0) \in O_{x_0} =]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[$ si $n \geq N'$ avec ε quelconque.

Inversement, on suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f , montrons qu'elle converge vers f au sens de la topologie produit. Soit O un ouvert quelconque contenant f , O contient un pavé ouvert $\prod_x O_x$ contenant f . On sait que tous les O_x sont égaux à $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini $O_{x_1}, \dots, O_{x_k}$ (qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$) avec $f(x_i) \in O_{x_i}$ pour $1 \leq i \leq k$. Il existe donc pour chaque i un réel $\varepsilon_i > 0$ tel que $]f(x_i) - \varepsilon_i, f(x_i) + \varepsilon_i[\subset O_{x_i}$. Puisque la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f , pour tout i , $1 \leq i \leq k$, il existe un

entier N_i tel que si $n \geq N_i$, $f_n(x_i) \in]f(x_i) - \varepsilon_i, f(x_i) + \varepsilon_i[\subset O_{x_i}$. Par conséquent, si $n \geq \max_i N_i$, on aura bien $f_n \in \prod_x O_x$.

2. Montrons que $g \in \overline{H}$. On se donne un pavé ouvert quelconque $\prod_x O_x$ contenant g , on va montrer que $\prod_x O_x \cap H \neq \emptyset$. On sait que tous les O_x sont égaux à $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini $O_{x_1}, \dots, O_{x_k}$ qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$ contenant 1, si on considère la fonction ϕ définie par $\phi(x) = 0$ si $x \notin \{x_1, \dots, x_k\}$ et $\phi(x_i) = g(x_i) = 1$ pour $i = 1, \dots, k$ alors $\phi \in \prod_x O_x \cap H$. g appartient donc à l'adhérence de H .

3. Remarquons que si la topologie était métrisable, puisque $g \in \overline{H}$, il existerait une suite $(\phi_n)_n$ dans H convergente vers g . Si on considère les ensembles $O_n = \{x \in \mathbb{R}, \phi_n(x) = 0\}$, alors les O_n sont des ouverts car les ϕ_n sont nulles sauf pour un nombre fini de réels (le complémentaire de chaque O_n est un ensemble de points isolés) et pour la même raison les O_n sont denses. Comme $\mathbb{R}$, muni de la valeur absolue est un espace métrique complet, c'est un espace de Baire et d'après l'exercice 3, $\bigcap_n O_n$ est une partie dense. En particulier, elle est non vide. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_n(\alpha) = 0$ pour tout entier n . La suite $(\phi_n(\alpha))_n$ n'est donc pas convergente vers $g(\alpha) = 1$. Ainsi, il n'y a pas convergence simple de la suite $(\phi_n)_n$ vers g et ceci est en contradiction avec la question 1.

Série 4

Exercice 26 Le but de cet exercice est de montrer que, dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension infinie. Nous allons montrer qu'on peut toujours construire une suite qui n'admet pas de suites extraites convergentes. On rappelle que tout sous espace vectoriel de dimension finie est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, n étant la dimension de l'e.v. en question. Par conséquent, il est aussi complet donc fermé car il est contenu dans un espace métrique (qui est séparé!).

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et soit F_0 le s.e.v. engendré par x_0 . Soit $y_0 \in E \setminus F_0$, on pose $\delta_0 = d(y_0, F_0)$. Justifier qu'on a $\delta_0 > 0$ et qu'il existe $z_0 \in F_0$ tel que $d(y_0, z_0) < 2\delta_0$.

2. On pose $x_1 = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$. Montrer qu'on a : $\|x_0 - x_1\| \geq 1/2$.

3. Montrer, par récurrence, que si on a une suite $x_0, x_1, \dots, x_k$ d'éléments linéairement indépendants de E telle que $\|x_l\| = 1$, pour $l = 0, \dots, k$ et $\|x_i - x_j\| \geq 1/2$, pour $i \neq j$, $i, j \in \{0, \dots, k\}$, alors il existe x_{k+1} tel que, si F_k désigne le s.e.v. engendré par $x_0, \dots, x_k$, on a $x_{k+1} \in E \setminus F_k$, avec $\|x_{k+1}\| = 1$ et $\|x_{k+1} - x_j\| \geq 1/2$ pour $j = 0, \dots, k$.

4. Justifier que la suite $(x_n)_n$ ainsi obtenue n'admet pas de suite extraite convergente puis conclure.

Exercice 27 La compactification d'Alexandrov assure que, pour tout espace localement compact X , il existe un espace compact noté $\hat{X}$ et une application continue $f : X \rightarrow \hat{X}$ tels que le complémentaire de $f(X)$ soit réduit à un seul élément de $\hat{X}$, qu'on note ω et que $f : X \rightarrow \hat{X} \setminus \{\omega\}$ soit un homéomorphisme. Notre objectif est de construire UN compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}$.

"La projection stéréographique." Dans $\mathbb{R}^2$, on note S^1 le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1. Une copie de $\mathbb{R}$ étant $\mathbb{R} \times \{0\}$, on munit S^1 et $\mathbb{R} \times \{0\}$ de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ définie comme suit :

Si $N(0,1)$ est le pôle nord de S^1 , et P un point quelconque de $\mathbb{R}$, la droite D passant par N et P coupe le cercle S^1 en un unique point M . On pose alors $f(P) = M$.

1. Vérifier rapidement que cette application est bijective puis vérifier géométriquement que si une suite de points $(P_n)_n$ tend vers un point P de $\mathbb{R}$, alors la suite $(f(P_n))_n$ tend

vers $f(P)$ et que, inversement, si $(M_n)_n$ est une suite de points qui tend vers M alors $f^{-1}(M_n)$ tend vers $f^{-1}(M)$.

S^1 étant compact, on dit que c'est un compactifié de $\mathbb{R}$. On dit aussi que N est le point à l'infini qui joue le rôle de ω .

2. Peut-on généraliser ce processus pour compactifier $\mathbb{R}^2$ et plus généralement $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 3$?

Exercice 28 Connexité et connexité par arcs.

On dit qu'une partie A d'un espace topologique E est connexe s'il n'existe pas deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ forment une partition non triviale de A . Autrement écrit, dès que $A = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ on a forcément $A \cap O_1 = \emptyset$ ou $A \cap O_2 = \emptyset$. Ceci équivaut à affirmer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A (pour la topologie induite) sont A ou $\emptyset$.

1. On veut montrer que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.

On note $I = [a, b]$, avec $a < b$, et on suppose qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$ tels que $I = (O_1 \cap I) \cup (O_2 \cap I)$, partition non triviale.

1. On suppose $b \in O_1$, il existe donc $c \in I \cap O_1$ tel que $]c, b[\subset I \cap O_1$. On considère l'ensemble $K = \{c \in I,]c, b[\subset I \cap O_1\}$. Justifier que K admet une borne inférieure α , puis montrer que α ne peut être ni un élément de O_1 ni un élément de O_2 . Conclure.

2. On dit qu'un espace topologique E est connexe par arcs si $\forall (x, y) \in E^2$, il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. γ est appelé chemin joignant x et y .

2a. Montrer que tout espace connexe par arcs est connexe. (On peut raisonner par l'absurde, supposer $X = O_1 \cup O_2$ avec O_1 et O_2 deux ouverts non vides et disjoints, choisir $x \in O_1$, $y \in O_2$ puis aboutir à une contradiction en utilisant la première question.)

2b. Montrer à l'aide du contre-exemple suivant que la réciproque est fautive. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la partie A formée par la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, $x \neq 0$ avec le segment $\{0\} \times [-1, 1]$. Montrer que cette partie est connexe sans être connexe par arcs.

2c. Montrer que tout espace vectoriel normé est connexe par arcs. (On cherchera un chemin sous forme de segment.)

3a. Montrer le résultat général suivant : Si $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme entre deux espaces topologiques, alors si $x \in X$ est un élément quelconque de X , l'application restriction notée encore $f : X \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{f(x)\}$ est un homéomorphisme.

3b. Montrer que si X est connexe et $f : X \rightarrow Z$, où Z est un espace topologique, est continue alors $f(X)$ est connexe.

3c. En utilisant les deux questions précédentes, montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé série 4

Corrigé 26 (Ex1) 1. Supposons $\delta_0 = 0$, il existe alors une suite $(\alpha_n)_n$ dans F_0 telle que $\|\alpha_n - y_0\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par suite, la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente dans E vers y_0 . Puisque F_0 est fermé, cette suite est convergente dans F_0 et forcément $y_0 \in F_0$, ce qui est absurde.

Par définition, on a : $d(y_0, F_0) = \inf_{x \in F_0} d(x, y_0)$ et par la propriété caractéristique de la borne inférieure, il existe $z_0 \in F_0$ tel que $\delta_0 \leq d(y_0, z_0) < 2\delta_0$.

2. Après calculs, on obtient :

$$\|x_0 - x_1\| = \frac{1}{\|z_0 - y_0\|} \cdot \| \|z_0 - y_0\|x_0 - z_0 + y_0 \| \geq \frac{1}{\|z_0 - y_0\|} \delta_0.$$

Ceci est dû au fait que l'élément $\beta_0 = -\|z_0 - y_0\|x_0 + z_0$ appartient à F_0 et donc $d(\beta_0, y_0) \geq \delta_0$. On déduit alors que $\|x_0 - x_1\| \geq \frac{\delta_0}{2\delta_0} = \frac{1}{2}$.

3. Si F_k est le sous espace vectoriel engendré par $x_0, \dots, x_k$, on choisit $y_k \in E \setminus F_k$ et on pose $\delta_k = d(y_k, F_k)$. Comme précédemment, on a $\delta_k > 0$ et il existe $z_k \in F_k$ tel que $\delta_k \leq d(y_k, z_k) < 2\delta_k$. On pose alors $x_{k+1} = \frac{z_k - y_k}{\|z_k - y_k\|}$ et on vérifie de façon analogue qu'on a : $\forall j$ entier, avec $0 \leq j \leq k$

$$\|x_j - x_{k+1}\| = \frac{1}{\|z_k - y_k\|} \cdot \| \|z_k - y_k\|x_j - z_k + y_k \| \geq \frac{1}{\|z_k - y_k\|} \delta_k \geq \frac{\delta_k}{2\delta_k} = \frac{1}{2}.$$

4. On peut affirmer que pour toute injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et tous entiers n et p distincts, on a : $\|x_{\varphi(n)} - x_{\varphi(p)}\| \geq \frac{1}{2}$. La suite $(x_n)_n$ (qui appartient à la boule unité) ne peut pas admettre de suites extraites convergentes et la boule unité fermée n'est donc pas compacte.

Corrigé 27 (Ex2) 1. Tout d'abord, on précise que S^1 est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent, un ouvert $O \subset S^1$ peut être caractérisé de la façon suivante : Pour tout $M \in O$, il existe un arc de cercle ouvert contenant M et contenu dans O . Ainsi, pour vérifier que l'application est bicontinue, il suffit de remarquer que l'image réciproque d'un arc de cercle ouvert est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et qu'inversement, l'image directe d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un arc de cercle ouvert. De plus, l'application est clairement bijective (on peut considérer l'équation de la droite passant par N et M et vérifier que cette droite coupe le plan $\mathbb{R} \times \{0\}$ en un point et un seul).

2. Ce procédé peut être généralisé aux dimensions supérieures. Pour S^n , on considère le point N de coordonnées $(0, \dots, 0, 1)$ et on se donne un point M de S^n quelconque, différent de N , dont les coordonnées sont de la forme $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ avec $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ et $a_{n+1} \neq 1$. La droite (MN) coupe l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ en un unique point P dont les coordonnées $(b_1, \dots, b_n, 0)$ peuvent être calculées en fonction de celles de M . Plus précisément, on trouve $b_i = \frac{a_i}{1 - a_{n+1}}$ pour $i = 1, \dots, n$. Inversement, on a aussi les formules : $a_1 = \lambda b_1, \dots, a_n = \lambda b_n$ et $a_{n+1} = 1 - \lambda$ avec $\lambda = \frac{2}{1 + b_1^2 + \dots + b_n^2}$. Ces formules prouvent que l'application ainsi que sa réciproque sont continues.

Corrigé 28 (Ex3) 1. K est non vide car si $b \in O_1 \cap I$, O_1 étant ouvert il existe un réel $\delta > 0$ tel que $]b - \delta, b] \subset O_1 \cap I$. Cet ensemble est aussi minoré par a , il admet donc une borne inférieure α . L'hypothèse $\alpha \in O_1$ implique l'existence d'un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]\alpha - \varepsilon, \alpha] \subset O_1 \cap I$ (car $\alpha \in O_1 \cap]a, b[$ qui est un ouvert) mais α ne serait plus un minorant. De la même façon, si $\alpha \in O_2$, alors $\alpha \in O_2 \cap]a, b[$ et donc il existerait $\varepsilon > 0$ tel que $[\alpha, \alpha + \varepsilon[\subset O_2 \cap]a, b[$ et α n'est plus une borne inférieure. Il est donc impossible de trouver deux tels ouverts O_1 et O_2 . Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est donc connexe.

2a. On suppose l'espace topologique E connexe par arcs et soit $E = U \cup V$ une partition de E par deux ouverts disjoints. Soient $x \neq y$ deux éléments de E . L'espace étant connexe par arcs, il existe un chemin, c'est à dire une application continue, $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. γ étant continue, $\gamma^{-1}(U)$ et $\gamma^{-1}(V)$ sont deux ouverts de $[0, 1]$ (muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$) disjoints et tels que $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$.

D'après 1., l'intervalle $[0, 1]$ est connexe et donc cette partition est triviale, autrement dit, $U = V = \emptyset$ et par suite, E est bien connexe.

2b. Il suffit de montrer le résultat pour la réunion du segment avec le graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$ lorsque $x > 0$. Notons L le segment $\{0\} \times [-1, 1]$ et supposons que la réunion de L avec le graphe de $x \mapsto \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$, noté L' , ne soit pas connexe. Il existe alors deux ouverts V et V' de $\mathbb{R}^2$ tels que $L \cup L' = [(L \cup L') \cap V] \cup [(L \cup L') \cap V']$ avec $[(L \cup L') \cap V] \neq \emptyset$ et $[(L \cup L') \cap V'] \neq \emptyset$. Le segment L est connexe car il est connexe par arcs : En effet, le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (0, tx + (1-t)y)$ relie deux éléments quelconques $(0, x)$ et $(0, y)$ de L . Le graphe L' est aussi connexe par arcs car le chemin γ' défini par $\gamma'(t) = (tx + (1-t)y, t\sin(1/x) + (1-t)\sin(1/y))$ relie les deux éléments $(x, \sin(1/x))$ et $(y, \sin(1/y))$. Remarquons que puisque le segment L est connexe alors, nécessairement, on a $L \subset V$ ou $L \subset V'$. Supposons, par exemple, qu'on a $L \subset V$, on a alors $L' \subset V'$ et $L' \cap V = \emptyset$. L'ouvert V de $\mathbb{R}^2$ qui contient le segment L contient des points du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$. En effet, soit par exemple le point $(0, 1)$ il appartient à $L \cap V$ et donc à V . Il existe une boule $B((0, 1), r)$ convenable contenue dans V . Si on choisit $x_k = \frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ et on fait tendre k vers $+\infty$, alors $(x_k, \sin(1/x_k))$ tend vers $(0, 1)$ et donc $L' \cap V \neq \emptyset$. On a obtenu une contradiction d'où la connexité de $L \cup L'$. Montrons que $L \cup L'$ n'est pas connexe par arcs. On doit choisir un point A dans L et un point B dans L' et montrer qu'ils ne peuvent pas être reliés par un chemin continu. On choisit $A = (0, 1)$ (ou n'importe quel autre point de L) et $B = (2/\pi, 1)$ (ou n'importe quel autre point du graphe). On suppose qu'il existe un chemin γ continu tel que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$. On considère l'ensemble $S = \{t \in [0, 1], \text{ tel que } \forall s \in [0, t], \gamma(s) \in L\}$. Cet ensemble est non vide et majoré, il admet donc une borne supérieure notée β . On a $\beta \in S$ car γ est continu et L est un fermé. Or si $t \in [0, 1]$ tend vers β^+ , $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ est tel que $\gamma(t)$ tend vers un point de L et par suite $\gamma_1(t)$ tend vers 0. Les points $\gamma(t)$ lorsque t tend vers β^+ sont des points de L' et $\gamma_2(t)$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers β^+ . Le chemin γ n'est donc pas continu en β .

2c. Si E est un e.v.n. et $x \neq y$ deux éléments de E , alors l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ définie par $\gamma(t) = tx + (1-t)y$ est continue car $\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| \leq |t - t_0| \cdot \|x - y\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0 .

3a. La nouvelle application est clairement bijective. Elle reste continue pour les nouveaux espaces car ils sont munis de la topologie induite ainsi que sa bijection réciproque.

3b. On raisonne par l'absurde ; L'existence d'une partition non triviale en deux ouverts de Z implique (en utilisant f^{-1}) l'existence d'une partition non triviale pour X ce qui est impossible.

3c. Supposons l'existence d'un homéomorphisme φ entre un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une boule ouverte B de $\mathbb{R}^2$. La restriction de φ à $I \setminus \{a\}$, où a est un point quelconque de I , est un homéomorphisme de $I \setminus \{a\}$ sur $B \setminus \{\varphi(a)\}$. Or toute boule est connexe par arcs et donc connexe. De plus, si on ôte un point à la boule, elle reste connexe par arcs et donc connexe. Par l'image de $B \setminus \{\varphi(a)\}$ (par l'homéomorphisme) serait connexe. Mais si on enlève un point à un intervalle ouvert, il ne reste plus connexe, d'où notre contradiction.