

Sujets d'examens avec corrigés

Examen 1 : Contrôle final (2014-15)

Exercice 1 $\mathbb{R}^n$ est muni de la distance euclidienne. On considère une partie non vide $A \subset \mathbb{R}^n$. On note pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = d(x, A)$.

1. Soit $x \in \overline{A}$, montrer que $d(x, A) = 0$. Inversement, montrer que si $d(x, A) = 0$ alors $x \in \overline{A}$.

2. Montrer que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, alors $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, puis déduire que f est lipschitzienne.

3. On suppose dans ce qui suit que A est fermée et soit B une partie fermée non vide vérifiant $A \cap B = \emptyset$. On définit $d(B, A) = \inf_{b \in B} d(b, A)$. On admet que $d(B, A) = \alpha > 0$.

En considérant l'application f et les intervalles $] -\alpha/2, \alpha/2[$ et $] \alpha/2, +\infty[$, montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $A \subset U_1$ et $B \subset U_2$.

Exercice 2 Les trois questions qui suivent sont indépendantes.

1. Soit X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application donnée. On dit que f est ouverte (fermée) si pour tout ouvert O de X (tout fermé F de X), $f(O)$ est un ouvert de Y ($f(F)$ est un fermé de Y).

Montrer que si f est bijective, alors f est ouverte si et seulement si f est fermée.

2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = x^2$.

2a. On veut montrer que φ est fermée. Pour cela, on se donne un fermé $F \subset \mathbb{R}$, une suite $(y_n)_n = (\varphi(x_n))_n$ dans $\varphi(F)$ convergente vers une limite l et on veut montrer que $l \in \varphi(F)$.

<https://keepmath.com>

Montrer que la suite $(x_n)_n$ est bornée et justifier qu'une valeur d'adhérence λ de $(x_n)_n$ vérifie $\varphi(\lambda) = l$.

2b. Déterminer $\varphi(\mathbb{R})$ puis décider si l'affirmation suivante est exacte : "Si une application est fermée alors elle est ouverte".

3. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur le premier facteur définie par $\pi(x, y) = x$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance du sup c'est à dire $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

3a. Soit $B((x_0, y_0), r)$ la boule de $\mathbb{R}^2$ centrée en (x_0, y_0) et de rayon r . Déterminer $\pi(B((x_0, y_0), r))$ en fonction de x_0 et de r . Peut-on affirmer que π est une application ouverte ?

3b. Soit F la partie définie par $F = \{(x, 1/x), x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$. En considérant l'application f définie par $f(x, y) = xy$ et $f^{-1}(\{1\})$, montrer que F est un fermé. Déterminer $\pi(F)$. L'application π est-elle fermée ?

Exercice 3 Soit $C = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue}\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)| dx$ et $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

1. Montrer que si a et b sont deux réels, on a $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Montrer que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(x)| dx$ est lipschitzienne dans les deux cas (lorsqu'on munit C de d_1 et lorsqu'on munit C de d_∞).

3. Soit S l'espace des suites réelles convergentes muni de la métrique $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ où $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$. On définit $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x) = l_x$ où l_x est la limite de la suite x .

Montrer que ψ est continue. (On peut montrer que $|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x, y) + |y_n - l_y|$ pour tout n puis choisir n assez grand et x assez proche de y pour garantir $|l_x - l_y| < \varepsilon$.)

Déduire que S_0 , l'ensemble des suites convergentes vers 0, est un fermé de S .

Corrigé Examen 1

Corrigé 1 (Ex1) Pour les questions 1 et 2, voir TD ou fichier du livre.

3. Si on admet que $d(B, A) = \alpha > 0$, alors $\forall x \in B$, on a $d(A, x) \geq \alpha$. D'autre part, on a $\forall x \in A$, $d(A, x) = 0$. Par suite, on déduit les inclusions suivantes

$$A \subset U_1 = f^{-1}(] - \alpha/2, \alpha/2[), \quad B \subset U_2 = f^{-1}(] \alpha/2, +\infty[)$$

f étant continue, U_1 et U_2 sont deux ouverts. Ils sont bien entendu disjoints.

Corrigé 2 (Ex2) 1. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application bijective. Si f est ouverte et si $F \subset X$ est un fermé, puisque $O = F^c$ est un ouvert, $f(O)$ est un ouvert. f étant bijective, on a $f(F^c) = (f(F))^c$. Ainsi, $(f(F))^c$ est un ouvert et donc $f(F)$ est un fermé. Ceci montre que f est fermée.

L'implication inverse se démontre de la même manière.

2. On considère $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varphi(x) = x^2$.

a. Montrons que φ est fermée. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, montrons que $\varphi(F)$ est fermé. Pour cela, on va montrer que si $(y_n)_n$ est une suite de $\varphi(F)$ convergente vers l , alors $l \in \varphi(F)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = \varphi(x_n) = x_n^2$. La suite $(x_n^2)_n$ est convergente, elle est donc bornée. Il existe un réel M tel que $|x_n^2| \leq M$ et donc $|x_n| \leq \sqrt{M}$. La suite $(x_n)_n$ est donc bornée, elle admet une valeur d'adhérence λ . Il y a une sous-suite $(x_{\psi(n)})_n$ qui converge vers λ . La suite $(\varphi(x_{\psi(n)}))_n$ converge aussi vers l et puisque φ est continue en λ , nécessairement on a $\varphi(\lambda) = l$. Ainsi, $\varphi(F)$ est fermé.

b. $\varphi(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$ est un fermé et $\mathbb{R}$ est un ouvert, on ne peut donc affirmer que si une application est fermée alors elle est ouverte, φ est un contre exemple.

3a. On a $\pi(B((x_0, y_0), r)) =]x_0 - r, x_0 + r[\times]y_0 - r, y_0 + r[$ (Si la boule est ouverte l'intervalle est ouvert, si la boule est fermée, l'intervalle est fermé.) π est ouverte car tout ouvert est réunion de boules et donc puisque l'image de chaque boule ouverte est une boule ouverte (qui est un intervalle dans ce cas), l'image de l'ouvert sera une réunion de boules. (Réunion d'intervalles ouverts dans ce cas.)

3b. $F = \{(x, 1/x), x \neq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ et f l'application définie par $f(x, y) = xy$. f étant continue et $\{1\}$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Or, $F = f^{-1}(\{1\})$, et donc F est un fermé.

$\pi(F) =]0, +\infty[$ est un ouvert. $\mathbb{R}^2$ étant fermé et son image étant ouverte non fermée, l'application π n'est pas fermée.

Corrigé 3 (Ex3) Soit $C = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continue}\}$. On définit sur C les deux distances $d_1(f, g) = \int_0^1 |(f - g)(x)| dx$ et $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$.

1. On écrit $a = a - b + b$, ce qui donne $|a| - |b| \leq |a - b|$. En permutant les rôles de a et de b , on obtient $|b| - |a| \leq |a - b|$ c'est à dire $-|a - b| \leq |a| - |b|$. On déduit alors $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2. Vérifions que l'application $f \mapsto \int_0^1 |f(x)| dx$ est lipschitzienne lorsque C est muni de la distance d_1 .

$$\left| \int_0^1 |f(x)| dx - \int_0^1 |g(x)| dx \right| \leq \int_0^1 ||f(x)| - |g(x)|| dx \leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx = d_1(f, g).$$

Lorsque C est muni de la distance d_∞ , la démonstration ne pose pas de problème.

3. $\psi(x) = l_x$ si l_x est la limite de la suite $x = (x_n)_n$. On a

$$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - l_y|, \forall n$$

$$|l_x - l_y| \leq |l_x - x_n| + d(x, y) + |y_n - l_y|, \forall n$$

$|l_x - l_y| \leq \varepsilon/3 + |x_n - y_n| + \varepsilon/3$, si n est choisi assez grand, d'où. $|l_x - l_y| \leq \varepsilon$, si $d(x, y) < \varepsilon/3$. Ce qui montre que l'application ψ est continue.

Pour montrer que l'ensemble S_0 est fermé, il suffit de remarquer que S_0 est l'image réciproque d'un fermé par une application continue. En effet, on a $S_0 = \psi^{-1}(\{0\})$.

Examen 2 : Rattrapage (2014-15)

Exercice 4 Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f^2 = f \circ f$ soit contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que $\forall x, y \in E$, $d(f^2(x), f^2(y)) \leq kd(x, y)$.

1. Justifier que f^2 admet un point fixe. Ce point fixe est-il unique ?
2. Montrer que f admet aussi un point fixe.

Exercice 5 Soit (E, d) un espace métrique.

1. On pose $d'(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Montrer que d' est une distance sur E .
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application strictement croissante, qui vérifie $f(0) = 0$ et $f(a + b) \leq f(a) + f(b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$.
 - a. On pose $\Delta(x, y) = f(d(x, y))$. Montrer que Δ est une distance sur E .
 - b. En utilisant la question 2a., montrer que si on pose $d''(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$, $\forall x, y \in E$, alors d'' est une distance sur E .
 - c. Si $E = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$, déterminer la boule $B_{d''}(0, a)$ lorsque $a \geq 1$ puis lorsque $a < 1$. (Ces boules sont des intervalles.)

Exercice 6 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles, et soit φ un polynôme non identiquement nul.

On pose, pour $f, g \in E$, $d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ et $d_\varphi(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| |\varphi(x)| dx$.

1. Justifier qu'il existe une constante réelle positive M telle que $|\varphi(x)| \leq M$, $\forall x \in [0, 1]$.
2. Montrer que l'application identité, $Id : (E, d_1) \rightarrow (E, d_\varphi)$, est continue.
3. On suppose que φ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.
 - a. Montrer que $J = |\varphi|([0, 1])$ est un intervalle fermé $[\alpha, \beta]$.
 - b. Dédurre que les deux distances sont équivalentes.

Exercice 7 $u = \sum_n u_n$ désigne une série numérique réelle. On considère l'ensemble des séries numériques réelles absolument convergentes, $S = \{u = \sum_n u_n, \text{ telles que } \sum_n |u_n| < \infty\}$.

On munit S de la distance d donnée par

$$d(u, v) = \sum_n |u_n - v_n|,$$

et on définit l'application $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

1. Montrer que l'application ψ est lipschitzienne.
2. Soit $B \subset S$ la partie définie par $B = \{u \in S, \text{ telles que } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 0\}$.
 B est-il un ouvert ou un fermé de S ? Justifier.

Corrigé Examen 2

Corrigé 4 (Ex1) 1. On applique le théorème du point fixe à la fonction f^2 . Ce point est unique d'après le théorème du point fixe.

2. Si x_0 est ce point fixe, on a $f(f(x_0)) = x_0$ et donc $f^2(f(x_0)) = f(x_0)$. Ainsi $f(x_0)$ est aussi un point fixe, et forcément, $f(x_0) = x_0$ d'après l'unicité. f admet aussi x_0 comme point fixe.

Corrigé 5 (Ex2) 1. d' est une distance. Les deux premières propriétés sont faciles à vérifier et la troisième résulte de l'inégalité $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ pour tout réels positifs a et b .

2a. On remarque que si $f(0) = 0$ et si f est croissante alors l'équation $f(x) = 0$ admet comme unique solution $x = 0$. Ceci prouve la première propriété des distances. La symétrie ne pose pas de problème particulier. L'inégalité triangulaire se déduit facilement de l'inégalité $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$.

2b. Il suffit de considérer la fonction f définie par $f(x) = \frac{x}{1+x}$ et de s'assurer qu'elle vérifie toutes les propriétés de la question 2a.

2c. On suppose d'abord $a \geq 1$, on a $x \in B_{d''}(0, a)$ si et seulement si $\frac{|x|}{1+|x|} \leq a$. Or, cette dernière égalité est toujours vérifiée. Par conséquent, on a $B_{d''}(0, a) = \mathbb{R}$ dans ce cas.

Si $a < 1$, alors l'inégalité $\frac{|x|}{1+|x|} \leq a$ est équivalente à $|x| \leq \frac{a}{1-a}$, c'est à dire $[-\frac{a}{1-a}, \frac{a}{1-a}]$ qui est donc la boule $B_{d''}(0, a)$ dans ce cas.

Corrigé 6 (Ex3) 1. φ étant un polynôme, c'est donc une fonction continue. Elle est donc bornée sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. On a $d_\varphi(f, g) \leq Md_1(f, g)$. L'application considérée est donc lipschitzienne et par suite, elle est continue.

3a. L'image d'un intervalle fermé borné par une application continue est un intervalle fermé borné. Il en est de même pour l'application $|\varphi|$. Il existe donc deux constantes réelles positives α et β telles que $\alpha \leq |\varphi(x)| \leq \beta$, pour tout $x \in [0, 1]$.

3b. De ce qui précède, on déduit que pour tous f, g dans E , on a : $\alpha d(f, g) \leq d_\varphi(f, g) \leq \beta d(f, g)$. Les distances sont comparables et donc équivalentes.

Corrigé 7 (Ex4) 1. On peut vérifier sans trop de difficultés que : $|\psi(u) - \psi(v)| \leq d(u, v)$.

2. On a $B = \psi^{-1}(\{0\})$ et puisque ψ est lipschitzienne, elle est continue et $\{0\}$ étant un fermé de $\mathbb{R}$, B est un fermé de S .

Examen 3 : Contrôle final (2015-16)

Exercice 8 $E = C(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies, continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On considère l'ensemble X défini par

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) \text{ telle que } (1+x^2)|f(x)| \text{ soit une fonction bornée}\}.$$

Pour tout $f \in X$, on pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+x^2)|f(x)|$ et $L(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. (On peut montrer mais on suppose que cette intégrale est convergente.)

1. Montrer que N définit une norme.

2a. Calculer $L(g)$ où g désigne la fonction définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

2b. En écrivant $f(x) = \frac{1}{1+x^2}(1+x^2)f(x)$, montrer que $|L(f)| \leq \pi N(f)$.

2c. Que peut-on déduire pour l'application linéaire L ? Peut-on calculer exactement $\|L\|$?

Exercice 9 Soit X un espace métrique, Y un espace topologique séparé et $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues.

On considère $A = \{x \in X, f(x) = g(x)\}$.

1. On veut montrer que A est un fermé. Pour cela, soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A qui converge vers une limite l , montrer que $f(l) = g(l)$ puis conclure.

2. Montrer que si f et g coïncident sur un ensemble Z dense de X , alors f et g coïncident sur X .

Exercice 10 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On rappelle que c'est un espace métrique complet.

1. Rappeler l'énoncé du théorème du point fixe.

2. On considère l'application $\varphi : E \rightarrow E$ définie pour tout $f \in E$ par

$$\varphi(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x^2 + t^2) f(t) dt.$$

Montrer que $\|\varphi(f) - \varphi(g)\| \leq \frac{1}{2} \|f - g\|$.

3. Dédurre que l'équation fonctionnelle $\varphi(f) = f$ admet une solution unique dans E .

Exercice 11 ℓ^∞ désigne l'ensemble des suites réelles bornées et c_0 le sous-ensemble des suites réelles convergentes vers 0. On munit ℓ^∞ de la distance d donnée par $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$.

1. On veut montrer que c_0 est un fermé de ℓ^∞ . Pour cela, nous allons montrer que son complémentaire $\overline{c_0}$ est un ouvert. Soit donc $z = (z_n)_n \in \overline{c_0}$.

1a. On suppose que z converge vers une limite $l \neq 0$ et on suppose $l > 0$. Si $x \in c_0$ est quelconque, en considérant la limite de la suite $(u_n)_n = (z_n - x_n)_n$, déduire (en fonction de l) un minorant strictement positif de $d(x, z)$ et ceci pour tout $x \in c_0$. Trouver alors un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{c_0}$.

1b. On suppose que la suite z est divergente. On suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $z_n \geq \varepsilon$ pour une infinité d'indices n . Proposer, ici aussi, un réel strictement positif R tel que la boule $B(z, R)$ soit contenue dans $\overline{c_0}$.

2. On désigne par V le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang. Montrer, en utilisant la première question, que V n'est pas dense dans ℓ^∞ . V est-il fermé dans c_0 ?

Corrigé Examen 3

Corrigé 8 (Ex1) 1. N est une norme (facile à montrer).

2a. $L(g) = [\arctan(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$.

2b. $|L(f)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) f(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \cdot N(f) dx \leq \pi N(f)$.

2c. On remarque que L est linéaire et l'inégalité précédente prouve que L est continue.

On peut calculer $\|L\|$ car, dans la question 2a, on a trouvé $L(g) = \pi$ et g fait partie de la boule unité car $N(g) = 1$. Le majorant π est donc atteint sur la boule unité, on a donc $\|L\| = \pi$.

Corrigé 9 (Ex2) 1. Soit $(x_n)_n$ une suite dans A convergente vers l , montrons que $l \in A$. Les applications f et g étant continues, la suite $(f(x_n))_n$ tend vers $f(l)$ et la suite $(g(x_n))_n$

tend vers $g(l)$. Les suites étant les mêmes et l'espace Y étant séparé, elles ont la même limite. Ainsi, $f(l) = g(l)$ et $l \in A$.

2. Si f et g coïncident sur Z tel que $\overline{Z} = X$, alors on a $Z \subset A$. Comme $\overline{Z} \subset \overline{A} = A$ et $\overline{Z} = X$, on a $A = X$. f et g coïncident donc partout sur X .

Corrigé 10 (Ex3) 1. Rappel de l'énoncé du théorème du point fixe, voir cours.

2.

$$\|\varphi(f) - \varphi(g)\| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(x^2 + t^2)(f(t) - g(t))dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \frac{1}{2}\|f - g\|.$$

3. Par application du théorème du point fixe, φ admet un unique point fixe dans l'espace métrique complet E .

Corrigé 11 (Ex4) 1. Pour montrer que c_0 est fermé, nous allons montrer que son complémentaire $\overline{c_0}$ est ouvert. Soit $z = (z_n)_n \in \overline{c_0}$ et on suppose, dans un premier temps, que z est convergente vers une limite $l > 0$. Dans ce cas, la suite $(z_n - x_n)_n$ tend vers l quel que soit la suite $x = (x_n)_n \in c_0$. On en déduit

$$d(x, z) = \sup_n |z_n - x_n| \geq l.$$

En effet, si on avait $d(x, z) < l$, la suite z ne peut converger vers l . Ainsi, $d(x, z) \geq l$ ceci $\forall x \in c_0$ et donc $B(z, l) \subset \overline{c_0}$. $\overline{c_0}$ est donc bien un ouvert dans ce cas.

Maintenant, si z n'est pas convergente, on suppose, par exemple, qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une infinité d'indices n tels que $z_n \geq \varepsilon$. On a alors

$$d(x, z) = \sup_n |z_n - x_n| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in c_0.$$

Sinon, si $d(x, z) < \varepsilon$, comme x_n tend vers 0, les z_n seront $< \varepsilon$ à partir d'un certain rang, ce qui n'est pas. On peut donc affirmer dans ce cas que $B(z, \varepsilon) \subset \overline{c_0}$ et $\overline{c_0}$ est donc aussi ouvert dans ce cas.

2. V n'est pas dense dans ℓ^∞ car on a

$$V \subset c_0 \subset \ell^\infty$$

$$\overline{V} \subset \overline{c_0} = c_0$$

c_0 étant strictement inclus dans ℓ^∞ , V n'est donc pas dense dans ℓ^∞ .

V n'est pas fermé dans c_0 , car on peut construire une suite dans V qui converge dans c_0 mais pas dans V , par exemple, la suite (x^p) , définie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ par $x^p = (x_n^p)_{n \geq 1}$, elle même définie par $x_n^p = 1/n$ si $n \leq p$ et $x_n^p = 0$ si $n > p$, est dans V . Elle converge vers la suite $(1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/n, \dots)$ dans c_0 mais cette limite n'est pas dans V .

Examen 4 : Rattrapage (2016-17)

Exercice 12 1. Donner la définition d'un espace métrique compact. 2. Donner une propriété équivalente.

Exercice 13 Soit (K, d) un espace métrique compact. On munit l'espace $K \times K$ de la distance D définie par

$$D((x, y), (x', y')) = \max(d(x, x'), d(y, y')).$$

1. Montrer, en utilisant les suites, que l'espace $K \times K$ est compact.
2. On rappelle que le diamètre $\delta(A)$ d'une partie non vide A d'un espace métrique (E, d_1) est donné par $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d_1(x, y)$.
 - 2a. Montrer que si un espace métrique est compact alors son diamètre est fini.
 - 2b. Montrer qu'il existe deux éléments a et b dans K tel que $\delta(K) = d(a, b)$. (On pourra considérer une application convenable définie sur $K \times K$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 14 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On définit sur E la norme N_1 , pour tout $f \in E$, par $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ et on considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0, 1]$.

1. Calculer $N_1(f_n)$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle dans E pour la norme N_1 ? Justifier votre réponse.
2. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle, dans E , pour la norme N_∞ ? On rappelle que $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
3. Les deux normes N_1 et N_∞ sont-elles équivalentes ?
4. Question bonus : Montrer que l'espace (E, N_1) n'est pas complet en choisissant une suite de Cauchy qui ne soit pas convergente.

Exercice 15 On reprend l'espace métrique $(E, N_\infty) = (C([0, 1], \mathbb{R}), N_\infty)$ de l'exercice précédent et on souhaite montrer que le sous espace $F \subset E$ des fonctions définies continues et affines par morceaux sur $[0, 1]$ est dense dans E . On se donne donc un élément quelconque $f \in E$, un réel $\varepsilon > 0$ et on cherche un élément $g \in F$ tel que $N_\infty(f - g) < \varepsilon$.

1. Montrer, en précisant la propriété utilisée, qu'il existe un réel $\delta > 0$ tel que si x et y sont deux éléments de $[0, 1]$ avec $|x - y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On suppose dans la suite $\delta < 1$.

2. On note $k_0, k_1, \dots, k_n$ la suite finie définie par $k_0 = 0$ et $k_{i+1} = k_i + \frac{1}{n}$ pour $i = 0, \dots, n-1$ et où n est un entier supposé vérifier la condition $1/n < \delta$. On définit la fonction g sur $[k_i, k_{i+1}[\cap [0, 1]$, pour $i = 0, \dots, n-1$ par $g(x) = f(k_i) + \frac{x - k_i}{k_{i+1} - k_i} (f(k_{i+1}) - f(k_i))$.

- 2a. Montrer que g est continue aux points $k_i \forall i = 1, \dots, n$.
- 2b. Montrer que $\forall x \in [0, 1], |f(x) - g(x)| < 2\varepsilon$. (On se placera sur l'intervalle $[k_i, k_{i+1}[$, on utilisera la première question et on remarquera que $|g(x) - f(k_i)| \leq |f(k_{i+1}) - f(k_i)|$ pour tout $x \in [k_i, k_{i+1}[$.)

Corrigé Examen 4

Corrigé 12 (Ex2) 1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite dans $K \times K$. K étant un compact, la suite $(x_n)_n$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l_1 . La suite extraite $(y_{\varphi(n)})_n$ admet une suite extraite $(y_{\varphi(\psi(n))})_n$ convergente vers une limite l_2 . La suite extraite $(x_{\varphi(\psi(n))})_n$, étant une suite extraite de $(x_{\varphi(n)})_n$, converge aussi vers l_1 . Finalement, la suite $(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))})_n$, extraite de la suite $(x_n, y_n)_n$, converge vers (l_1, l_2) .

2a. On raisonne par l'absurde. Soit $\alpha \in K$. K n'étant pas borné, il existe un élément $x_0 \in K$ tel que $d(x_0, \alpha) \geq 1$. De même il existe un élément $x_1 \in K$ vérifiant $d(x_1, \alpha) \geq 2$.

On construit par récurrence une suite d'éléments $(x_n)_n$ dans K vérifiant $d(x_n, \alpha) \geq n + 1$. La suite $(x_n)_n$ n'admet pas de sous suite convergente. En effet, si $(x_n)_n$ avait une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_n$ convergente vers une limite l alors, par continuité de la distance, $d(x_{\varphi(n)}, \alpha)$ devrait converger vers $d(l, \alpha)$. On a obtenu une contradiction.

2b. L'application distance $d : K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ étant continue, l'image de $K \times K$ est un compact de $\mathbb{R}$, par conséquent un fermé, borné de $\mathbb{R}$. Si on pose

$$F = \{d(x, y), (x, y) \in K \times K\}$$

alors F est majoré et sa borne supérieure qui est $\delta(K)$ appartient à F . Il existe donc $(a, b) \in K \times K$ tel que $d(a, b) = \delta(K)$.

Corrigé 13 (Ex3) 1. On a $N_1(f_n) = N_1(f_n - 0) = \frac{1}{n+1}$. Ceci prouve que la suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction identiquement nulle (qui est bien élément de E).

2. Comme la convergence pour la norme N_∞ est la convergence uniforme et que la convergence uniforme implique la convergence simple, si la suite $(f_n)_n$ convergeait vers une fonction φ pour la norme N_∞ alors forcément, on a $\varphi(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$ et $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ si $x \in [0, 1[$. Or, cette fonction n'étant pas continue en 1, n'est pas élément de E .

3. Les deux normes n'ayant pas les mêmes suites convergentes, elles ne sont pas équivalentes.

Corrigé 14 (Ex4) 1. La fonction f étant continue sur un compact, elle y est uniformément continue. Ceci répond à cette question.

2a. On montre facilement que la limite à droite qui est $f(k_i)$ est aussi la limite à gauche.

2b. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et de remarquer que

$$|f(k_i) - g(x)| \leq |f(k_{i+1}) - f(k_i)|, \text{ pour } x \in [k_i, k_{i+1}].$$

Examen 5 : Contrôle final (2017-18)

Exercice 16 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des applications définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ donnée, pour tout $f \in E$, par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

On définit l'application $\varphi : E \rightarrow E$ par

$$\varphi(f) = g, \text{ avec } g(x) = \int_0^x \sin \frac{f(t)}{2} dt.$$

1. Montrer que l'application φ est lipschitzienne.

2. Justifier que l'équation $\varphi(f) = f$ admet une unique solution $f \in E$. On précisera toutes les hypothèses utiles.

Exercice 17 $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, d)$ est l'espace métrique produit muni de l'une des distances habituelles. On considère la projection $p_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, par $p_1(x, y) = x$.

On rappelle qu'une application est dite fermée si l'image de tout fermé est un fermé et on souhaite montrer que l'application p_1 n'est pas fermée.

On considère la partie $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, k \geq 1} \left(\left[-1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right] \times \{k\} \right).$$

1. Soit $(x_n, y_n)_n$ une suite de points de A convergente vers $(l_1, l_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En remarquant que la suite $(y_n)_n$ est une suite d'entiers naturels, justifier que cette suite est constante à partir d'un certain rang (c'est à dire $y_n = k_0 \in \mathbb{N}$ pour $n \geq n_0$).
2. En étudiant la suite $(x_n)_n$, montrer que (l_1, l_2) appartient à A puis conclure que A est un fermé.
3. Déterminer $p_1(A)$ puis conclure.
4. L'application p_1 est elle ouverte ? Justifier.

Exercice 18 On considère une nouvelle fois l'espace métrique (E, d_∞) de l'exercice 1, d_∞ étant la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ et l'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_1)$ des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, où la norme est donnée par $\|f\|_1 = \|f'\|_\infty + |f(0)|$, pour tout $f \in F$.

On définit, pour tout entier $k \geq 1$, l'application ψ_k sur $[0, 1]$ par $\psi_k(x) = x^k$ si $x \in [0, 1/2]$ et $\psi_k(x) = \frac{1}{2^k} - x^k$ si $x \in]1/2, 1]$.

1. Justifier qu'on a $\psi_k \in E$, $\psi_k \notin F$ puis calculer $\|\psi_k\|_\infty$, pour tout $k \geq 1$.
- 2a. Soit $f \in F$ et soit $r > 0$ un réel quelconque. En utilisant ψ_k (pour k assez grand) et f , donner une fonction $g \in E$ avec $g \notin F$ vérifiant $d_\infty(f, g) < r$.
- 2b. Peut-on affirmer que F est un ouvert de E ? Justifier.
- 2c. F est-il un fermé de E ?
- 3a. Soit $K \subset F$ un compact. Montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $\forall f \in K$, on a $\|f\|_1 \leq R$.
- 3b. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer deux réels α et β tels que $|f(x)| \leq \alpha x + \beta$, pour tout $f \in K$ et tout $x \in [0, 1]$.
- 3c. Dédurre que K est borné dans E .

Corrigé Examen 5

Corrigé 15 (Ex1) 1. Pour f_1, f_2 appartenant à E , on a

$$|(\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x)| \leq \int_0^x \left| \sin \frac{f_1(t)}{2} - \sin \frac{f_2(t)}{2} \right| dt \leq \int_0^1 \left| \sin \frac{f_1(t)}{2} - \sin \frac{f_2(t)}{2} \right| dt$$

ceci pour tout $x \in [0, 1]$. D'autre part, on a $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. On déduit

$$|(\varphi(f_1) - \varphi(f_2))(x)| \leq \int_0^1 \left| \frac{f_1(t)}{2} - \frac{f_2(t)}{2} \right| dt.$$

Enfin, en passant au "sup", on a

$$\|\varphi(f_1) - \varphi(f_2)\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Ceci prouve que l'application φ est lipschitzienne.

2. L'espace E étant complet et l'application φ contractante ($\frac{1}{2} < 1$), on peut appliquer le théorème du point fixe.

Corrigé 16 (Ex2) 1. Si $(y_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers une limite l_2 , forcément $l_2 \in \mathbb{N}$ (sinon $l_2 \in]p, p+1[$, p entier convenable, et pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas une suite d'entiers). Ensuite, la suite est forcément constante et égale à l_2 à partir d'un certain rang sinon, ici aussi, pour un bon choix de $\varepsilon > 0$, la suite ne serait pas convergente vers l_2 .

2. D'après ce qui précède, puisque $y_n = l_2 = k_0$ à partir d'un certain rang, les x_n appartiennent à l'intervalle $[-1 + \frac{1}{k_0}, 1 - \frac{1}{k_0}]$ à partir d'un certain rang. Cette suite étant convergente et l'intervalle étant fermé, sa limite l_1 appartient à cet intervalle. Ainsi, $(l_1, l_2) \in A$ et A est un fermé.

3. On a $p_1(A) =]-1, 1[$ qui est un ouvert et A est un fermé, l'application p_1 n'est donc pas fermée.

4. L'application p_1 est ouverte. En effet, si O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in p_1(O)$, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $p_1((\alpha, \beta)) = \alpha$, avec $(\alpha, \beta) \in O$. Puisque O est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne (par exemple), et si $(\alpha, \beta) \in O$, alors il existe un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte, $B((\alpha, \beta), r) \subset \mathbb{R}^2$ soit contenue dans O . On affirme que la boule de $\mathbb{R}$, $B(\alpha, r)$ est contenu dans $p_1(O)$. En effet, tout point $x \in B(\alpha, r)$ est l'image de $(x, \beta) \in B((\alpha, \beta), r) \subset O$. Ce qui prouve bien que $p_1(O)$ est un ouvert.

Corrigé 17 (Ex3) 1. ψ_k est continue en $1/2$ et partout sur $[0, 1]$, ainsi $\psi_k \in E$. Mais, $\psi_k \notin F$ car elle n'est pas dérivable en $1/2$. De plus, on a $\|\psi_k\|_\infty = \frac{1}{2^k}$.

2a. Il suffit de poser $g = f + \psi_k$. Cette fonction convient.

2b. F n'est certainement pas un ouvert car si $f \in F$ est un élément quelconque, toute boule centrée en f ne peut être contenue dans F car elle contiendra toujours un élément de E qui n'est pas dans F d'après la question qui précède.

2c. Cette question est hors barème. F n'est pas fermé dans E car on peut construire une suite d'éléments de F convergente dans E sans être convergente dans F . En effet, la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies, pour tout $n \geq 1$, sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ qui est bien dans E sans être dans F .

3a. Tout compact dans un espace métrique étant borné, on a le résultat.

3b. Par application du TAF, on a, pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $f \in K$, $|f(x) - f(0)| = |f'(c)|x$, avec $c \in]0, x[$ convenable. D'où, $|f(x) - f(0)| \leq \|f'\|_\infty x \leq \|f\|_1 x \leq Rx$.

On déduit alors $|f(x)| \leq Rx + |f(0)| \leq Rx + \|f\|_1 \leq Rx + R$.

4. On a $|f(x)| \leq 2R$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $\|f\|_\infty \leq 2R$, ceci étant vrai pour tout $f \in K$. Par suite K est borné dans E .

Examen 6 : Rattrapage (2018-19)

Exercice 19 $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles. On le munit de la distance d donnée pour tout $(f, g) \in E^2$ par $d(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$. On considère l'application φ définie sur E par : $\varphi(f)(x) = \frac{1}{2} \cos(f(x))$ pour tout $f \in E$ et tout $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que l'application φ est contractante et déduire que l'équation $\varphi(f) = f$ admet une unique solution notée f_0 dans E . (On rappelle la formule $\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin(\frac{p+q}{2}) \cdot \sin(\frac{p-q}{2})$).

2. Montrer que l'équation $2x - \cos(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ puis déduire la solution f_0 .

Exercice 20 Soit (E, d) un espace métrique compact et k un réel vérifiant $k > 1$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application $f : E \rightarrow E$ telle que $d(f(x), f(y)) = k.d(x, y)$ pour tous $(x, y) \in E^2$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq x_0$.
2. En considérant la suite $(f^n(x_0))_n$, trouver une contradiction puis conclure.

Exercice 21 On se donne l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ muni de topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. On rappelle que $O \subset \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$ s'il existe $O' \subset \mathbb{R}$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $O = O' \cap \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la partie $\{m\}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$ puis déduire que toute partie de $\mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$.
2. Peut-on affirmer que toute application $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est continue ? Justifier.

Exercice 22 Dans cet exercice, E est l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_n$ absolument convergentes, c'est à dire vérifiant $\sum |u_n| < \infty$. On définit l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $N(u) = \sum |u_n|$.

1. Montrer que l'application N est une norme sur E .
2. La suite constante nulle est notée 0 et on note $B_F(0, 1) = \{u \in E, N(u - 0) = N(u) \leq 1\}$ la boule unité fermée. On veut montrer que cette boule n'est pas compacte.
On choisit une suite $(\delta_k)_k$ dans $B_F(0, 1)$. On précise que c'est en fait une suite de suites, c'est à dire que chaque δ_k est une suite qui appartient à $B_F(0, 1)$. Le choix est le suivant : Si on note $\delta_k = (\delta_k^n)_n$ pour tout $k \geq 0$ alors $\delta_k^n = 0$ si $n \neq k$ et $\delta_k^k = 1$.
2a. Ecrire les éléments de δ_1 puis ceux de δ_n pour $n \geq 2$ et justifier qu'on a bien $\delta_k \in B_F(0, 1)$ pour tout $k \geq 0$.
2b. Soit $u = (u_n)_n \in E$, justifier que u_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N$ on a $|\delta_k^k - u_k| \geq 1 - \varepsilon$.
2c. On suppose l'existence d'une suite extraite $(\delta_{\varphi(k)})_k$ convergente dans $B_F(0, 1)$ vers une limite $u = (u_n)_n$. En utilisant la question précédente, trouver une contradiction puis conclure.

Corrigé Examen 6

Corrigé 18 (Ex1) 1. Après des majorations convenables, on obtient : $|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$ qui implique la majoration $\|\varphi(f) - \varphi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$.

L'application φ est donc contractante, elle admet donc un unique point fixe f_0 .

2. Il est facile de justifier que l'équation $2x - \cos(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f_0 cherchée est forcément la fonction constante f_0 définie pour tout $x \in [0, 1]$ par $f_0(x) = \alpha$.

Corrigé 19 (Ex2) 1. Sinon, l'égalité $f(x) = x$ pour tout $x \in E$ entraîne $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ce qui contredit l'hypothèse $d(f(x), f(y)) = k.d(x, y)$ avec $k > 1$.

2. La suite $(f^n(x_0))_n$ est dans E qui est compact, elle admet donc une suite extraite $(f^{\varphi(n)}(x_0))_n$ convergente vers un élément $\alpha \in E$. L'application f étant continue, la suite $(f(f^{\varphi(n)}(x_0)))_n$ converge vers $f(\alpha)$.

D'une part, par continuité de la distance, on a $d(f(f^{\varphi(n)}(x_0)), f^{\varphi(n)}(x_0))$ qui tend vers $d(f(\alpha), \alpha)$ et d'autre part, $d(f(f^{\varphi(n)}(x_0)), f^{\varphi(n)}(x_0)) = k^{\varphi(n)}d(f(x_0), x_0)$ qui tend vers $+\infty$, ce qui est une contradiction. Il n'existe donc pas une telle application f .

Corrigé 20 (Ex3) 1. Si $m \in \mathbb{Z}$, alors si $B(m, 1/2)$ désigne la boule (dans $\mathbb{R}$) de centre m et de rayon $1/2$, on a $B(m, 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{m\}$.

Le singleton $\{m\}$ est donc un ouvert de $\mathbb{Z}$ pour la topologie induite par celle de $\mathbb{R}$.

Toute partie de $\mathbb{Z}$ étant réunion d'éléments de $\mathbb{Z}$, et toute réunion d'ouverts étant un ouvert, toute partie de $\mathbb{Z}$ est donc un ouvert de $\mathbb{Z}$.

2. Oui car l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{Z}$ est avant tout une partie de $\mathbb{Z}$ qui est ouverte d'après la question précédente.

Corrigé 21 (Ex4) 1. Cette question ne présente pas de difficulté particulière.

2a. On a $\delta_1 = (0, 1, 0, \dots)$, $\delta_2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$... On déduit : $N(\delta_1) = 1$, $N(\delta_2) = 1$, ..., $N(\delta_k) = 1$, pour tout entier $k \geq 1$.

2b. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente et le terme général u_n tend vers 0. En particulier, on a : $|\delta_k^k - u_k| = |1 - u_k|$ tend vers 1 lorsque k tend vers $+\infty$. Si k est assez grand, on aura :

$$1 - \varepsilon \leq |1 - u_k| \leq 1 + \varepsilon.$$

2c. Par l'absurde, supposons que $N(\delta_{\varphi(k)} - u)$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$, mais ceci contredit $|\delta_{\varphi(k)}^{\varphi(k)} - u_{\varphi(k)}| \geq 1 - \varepsilon$, si k est assez grand.

Examen 7 : Contrôle final (2019-20)

Exercice 23 Sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, on définit la topologie pour laquelle les ouverts sont $\emptyset$, $\mathbb{N}$, et les parties de la forme $[n, +\infty[\cap \mathbb{N}$ où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que c'est bien une topologie. Cette topologie est-elle séparée ? Justifier.

2. Montrer que tout espace métrique est séparé, c'est à dire que si $x \neq y$ sont deux éléments de E , alors on peut trouver deux boules ouvertes disjointes l'une centrée en x et l'autre centrée en y .

3. Justifier que la topologie définie ci-dessus sur $\mathbb{N}$ n'est pas métrisable.

Exercice 24 E est l'espace métrique $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ définie par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. On définit l'application $\Phi : E \rightarrow E$ pour tout $f \in E$ par $\Phi(f)(x) = \frac{1}{4}[\int_0^x f(t)dt + \sin f(x)]$, $\forall x \in [0, 1]$.

On considère l'équation fonctionnelle $\Phi(f) = f$ d'inconnue f . (*)

1. Montrer que l'application Φ est contractante.

2. Dédurre que la fonction identiquement nulle est la seule solution de l'équation (*).

Exercice 25 (E, d) est un espace métrique compact. Soit $K > 1$ un réel, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application continue $f : E \rightarrow E$ vérifiant $d(f(x), f(y)) = Kd(x, y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$, $x \neq y$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq x_0$.

2. Soit $(u_n)_n$ la suite dans E définie par $u_n = f^n(x_0)$, pour tout $n \geq 0$.

Montrer que la suite de nombres réels $(\alpha_n)_n$ définie par $\alpha_n = d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0))$ tend vers $+\infty$.

3.a. Justifier qu'il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers une limite $l \in E$.

3.b. Montrer qu'alors la suite extraite $(\alpha_{n_k})_k$ admet deux limites distinctes que l'on donnera.

3.c. Conclure.

Exercice 26 E est l'espace vectoriel $C([0, 1], \mathbb{R})$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_1$ définie, pour tout $f \in E$, par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$.

Soit $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

On souhaite montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$. Soit $\varphi \in E$, un élément quelconque et $\varepsilon > 0$ un réel, on cherche à construire une fonction appartenant à F et appartenant à la boule $B(\varphi, \varepsilon)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on considère la fonction ψ_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$\psi_n(x) = \begin{cases} n\varphi(\frac{1}{n})x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \varphi(x) & \text{si } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, ψ_n appartient à E .
2. Montrer que, pour n assez grand, on a $\|\varphi - \psi_n\|_1 < \varepsilon$ puis conclure.
3. On munit cette fois E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la partie F est alors fermée, non dense.

Corrigé Examen 7

Corrigé 22 (Ex1) 1. Il est facile de vérifier que c'est bien une topologie. Montrons qu'elle n'est pas séparée. Soient n_1 et n_2 deux entiers distincts. Tout ouvert contenant n_1 est de la forme $[p_1, +\infty[\cap \mathbb{N}$, avec $p_1 \leq n_1$ et tout ouvert contenant n_2 est de la forme $[p_2, +\infty[\cap \mathbb{N}$, avec $p_2 \leq n_2$. Deux tels ouverts ne sont jamais disjoints.

2. Tout espace métrique est séparé (vu en cours). En effet, si x et y sont deux éléments quelconques, alors $\alpha = d(x, y) > 0$. Il suffit de considérer les deux boules ouvertes $B(x, \alpha/2)$ et $B(y, \alpha/2)$ qui sont disjointes (utiliser une bonne inégalité triangulaire).

3. Si la topologie était métrisable, elle serait séparée d'après la question 2., or elle ne l'est pas d'après la question 1.

Corrigé 23 (Ex2) 1. On a : $|\Phi(f)(x) - \Phi(g)(x)| \leq \frac{1}{4}(\int_0^x |f(t) - g(t)|dt + |\sin f(x) - \sin g(x)|) \leq \frac{1}{4}(\|f - g\|_\infty + |f(x) - g(x)|) \leq \frac{1}{4}(\|f - g\|_\infty + \|f - g\|_\infty) \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$.

On a obtenu : $\|\Phi(f) - \Phi(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$. L'application Φ est donc contractante.

2. L'espace étant complet alors d'après le théorème du point fixe, Φ admet un unique point fixe. Or, la fonction identiquement nulle est une solution évidente de l'équation (*), elle en est donc l'unique solution.

Corrigé 24 (Ex3) 1. Par l'absurde, on obtient immédiatement une contradiction avec la propriété vérifiée par f .

2. On a : $\alpha_n = K^n d(f(x_0), x_0)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3a. L'espace étant compact, d'après le théorème de Bolzano, il existe une suite extraite $(u_{n_k})_k$ qui converge vers une limite l .

3b. L'application f est continue (car lipschitzienne), la suite $f(f^{n_k}(x_0))$ tend vers $f(l)$ et, puisque la distance est continue, $\alpha_{n_k} = d(f(f^{n_k}(x_0)), f^{n_k}(x_0))$ tend vers $d(f(l), l)$. D'autre part, on a $\alpha_{n_k} = K^{n_k} d(f(x_0), x_0)$ tend vers $+\infty$.

3c. La limite étant unique, on a obtenu une contradiction. Il n'existe donc pas une telle application f .

Corrigé 25 (Ex4) 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ψ_n est continue, en particulier en $x_0 = 1/n$, donc $\psi_n \in E$.

$$2. \|\varphi - \psi_n\|_1 = \int_0^1 |\varphi(x) - \psi_n(x)|dx = \int_0^{1/n} |\varphi(x) - n\varphi(1/n)x|dx$$

$\leq \int_0^{1/n} |\varphi(x)| dx + \int_0^{1/n} |\varphi(1/n)| dx \leq \frac{1}{n}(|\varphi(0)| + 1) + \frac{1}{n}(|\varphi(0)| + 1)$, si n est assez grand.
 Finalement, si n est assez grand, $\|\varphi - \psi_n\|_1 \leq \varepsilon$ si n est assez grand.
 F est donc dense dans l'espace métrique $(E, \|\cdot\|_1)$.

3. On considère l'application $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui pour tout $f \in E$ par $\Phi(f) = f(0)$. Elle est linéaire et continue car on a : $|\Phi(f)| \leq \|f\|_\infty$.

Puisque $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, $F = \Phi^{-1}(\{0\})$ est un fermé.

Si on considère, par exemple, l'application constante g , définie par $g(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors pour toute application h dans F , on a $\|g - h\|_\infty \geq |g(0) - h(0)| = 1$. La boule centrée en g et de rayon $1/2$ n'intersecte donc pas F qui n'est donc pas dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Examen 8 : Rattrapage (2019-20)

Exercice 27 (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \rightarrow X$ est une application continue et bijective. On veut montrer que f est un homéomorphisme. On veut donc montrer que f est une application ouverte.

1. On suppose que pour tout fermé F , $f(F)$ est un fermé. Montrer que pour tout ouvert O , $f(O)$ est un ouvert.

2. Soit donc F un fermé quelconque non vide et $\gamma \in \overline{f(F)}$. On note $(\gamma_n)_n$ une suite dans $f(F)$ qui converge vers γ et $\gamma_n = f(\alpha_n)$ pour $n \geq 0$.

2a. Justifier que la suite $(\alpha_n)_n$ admet une suite extraite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ convergente vers un élément noté α .

2b. Montrer que γ appartient à $f(F)$ puis conclure.

Exercice 28 (E, d) est un espace métrique. On rappelle que la boule fermée de centre $x \in E$ et de rayon le réel $r > 0$ est la partie

$$B_F(x, r) = \{y \in E, d(x, y) \leq r\}.$$

1. Montrer que la boule fermée B_F est un fermé en montrant que son complémentaire est un ouvert.

2. On veut montrer que l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas nécessairement la boule fermée associée.

On considère, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne, la partie $Y = ([-1, 2] \times \{0\}) \cup \{A\}$ où A est le point de coordonnées $(0, 1)$.

2a. Dessiner la partie Y puis déterminer la boule ouverte $B((0, 0), 1)$.

2b. Montrer que A appartient à la boule fermée $B_F((0, 0), 1)$.

2c. Trouver un réel $\alpha > 0$ tel que $B(A, \alpha) \cap B((0, 0), 1) = \emptyset$ puis conclure.

Exercice 29 $(x_n)_n$ désigne une suite de nombres réels et l^1 désigne l'espace vectoriel défini par

$$l^1 = \{(x_n)_n, \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n| < +\infty\}.$$

Si $x = (x_n)_n \in l^1$, on considère la norme notée $\|\cdot\|$ et définie pour tout $x \in l^1$ par $\|x\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

Soit $\varphi : (l^1, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}.$$

1. Trouver un réel $M > 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in l^1$. Que peut-on en déduire pour l'application φ ?

2. On considère à présent l'application (non linéaire) $f : l^1 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$.

2a. Montrer que f est bien définie, c'est à dire que si $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ converge.

2b. On veut montrer que $\forall r > 0$, f est lipschitzienne sur la boule $B(0, r)$, 0 étant la suite identiquement nulle.

(i) Justifier que si $x = (x_n)_n \in B(0, r)$, alors pour tout entier n , on a $|x_n| \leq r$.

(ii) Montrer que si $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ sont deux éléments de $B(0, r)$, on a : $|f(x) - f(y)| \leq 2r\|x - y\|$.

(iii) Dédurre que f est continue sur l^1 . (On n'essiera pas de montrer que f est lipschitzienne sur l^1 .)

3. On note G la partie de l^1 donnée par $G = f^{-1}(\{1\}) \cap B_F(0, 1)$.

3a. Justifier que G est fermée.

3b. On pose, pour tout entier $k \geq 0$, $x^k = (x_k^n)_n$ avec $x_k^n = \delta_{nk}$. (Par exemple, $x^1 = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$.) Vérifier qu'on a $x^k \in G$ pour tout $k \geq 0$ puis calculer $\|x^k - x^l\|$ pour $k \neq l$.

3c. Dédurre de ce qui précède que G n'est pas compact.

Corrigé Examen 8

Corrigé 26 (Ex1) 1. Si on considère le complémentaire de $f(O)$, on a $f(O)^c = f(O^c)$, il est donc fermé car c'est l'image du fermé O^c .

2. L'espace étant compact, il existe une suite extraite $(\alpha_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers un élément noté α . Par continuité de l'application f , la suite extraite $(\gamma_{\varphi(n)})_n$ converge vers $f(\alpha)$. Comme c'est une sous suite de $(\gamma_n)_n$, elle converge vers γ . L'unicité de la limite implique $\gamma = f(\alpha)$, c'est à dire qu'on a bien $\gamma \in f(F)$, ce dernier est donc bien un fermé. On conclut d'après la première question que f est un homéomorphisme.

Corrigé 27 (Ex2) 1. Montrons que le complémentaire de $B_F(x, r)$ est un ouvert. Si $y \in B_F(x, r)^c$ et si on pose $r' = d(x, y) > 0$, on peut vérifier que la boule ouverte $B(y, r')$ est contenue dans $B_F(x, r)^c$ qui est donc un ouvert.

2a. Y est la réunion du segment d'extrémités les points $(-1, 0)$ et $(2, 0)$ avec le point A .

2b. On a $d((0, 0), A) = 1$ et donc $A \in B_F((0, 0), 1)$.

2c. Tout d'abord, la boule ouverte $B((0, 0), 1)$ est exactement le segment mentionné ci-dessus. D'autre part, la boule $B(A, 1/2)$ (par exemple) n'intersecte pas ce segment (si M est un point quelconque du segment, on a $d(A, M) \geq 1$). On a donc vérifié qu'on a $A \in B_F((0, 0), 1)$ mais $A \notin \overline{B((0, 0), 1)}$.

Corrigé 28 (Ex3) 1. On a $|\varphi(x)| \leq \sum |x_n| = \|x\|$. $M = 1$ convient. L'application linéaire φ est donc continue.

2a. Si $\sum |x_n|$ converge, alors la suite $(x_n)_n$ est convergente vers 0 et donc elle est bornée. Par suite, il existe un réel $K > 0$ tel que $|x_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on obtient $|\sum x_n^2| = \sum x_n^2 \leq K \sum |x_n|$, la série $\sum x_n^2$ est donc convergente.

2b. (i) Si $\sum |x_n| \leq r$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq r$.

(ii) On écrit : $f(x) - f(y) = \sum (x_n - y_n)(x_n + y_n)$ qui implique $|f(x) - f(y)| \leq \sum |x_n - y_n| \cdot |x_n + y_n| \leq \sum |x_n - y_n|(|x_n| + |y_n|) \leq 2r \sum |x_n - y_n|$. On a donc obtenu : $|f(x) - f(y)| \leq 2r\|x - y\|$ et f est donc lipschitzienne sur la boule $B(0, r)$.

(iii) Puisque $\forall x \in l^1$, il existe $r > 0$ tel que $x \in B(0, r)$ et que f est lipschitzienne sur cette boule, f est donc continue en x .

3a. $f^{-1}(\{1\})$ est un fermé car f est continue, G est donc fermé étant l'intersection de deux fermés.

3b. $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\sum_n |x_k^n|^2 = \delta_k^2 = 1$ et $f(x^k) = 1$. D'autre part, $d(x^k, 0) = \sum_n |x_k^n| = \sum_n \delta_k^n = \delta_k = 1$ assure qu'on a $x^k \in B_F(0, 1)$. On a donc bien vérifié que $x^k \in G$, $\forall k \in \mathbb{N}$. De plus, on a $\|x^k - x^l\| = \delta_k + \delta_l = 2$.

3c. La suite $(x^k)_k$ d'éléments de G n'admet aucune suite extraite convergente car pour toute injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a $\|x^{\varphi(k)} - x^{\varphi(l)}\| = 2$ et le critère de Cauchy ne peut être validé. La partie G n'est donc pas compacte.

<https://keepmath.com>

<https://keepmath.com>