

TD: Dualité - Déterminants

Exercices avec solutions détaillées

Chapitre 3: Formes Linéaires - Dualité

Exercice 0.1. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n . Montrer que toute forme linéaire non nulle sur E a pour noyau un hyperplan de E .

Solution 0.1. Soit $\varphi \in E^*$ non nulle. Alors φ est surjective car $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de K non réduit à $\{0\}$, donc $\text{Im}(\varphi) = K$. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\ker(\varphi)) + 1$$

Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$, ce qui signifie que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .

Exercice 0.2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit H un hyperplan de E . Montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \ker(\varphi)$.

Solution 0.2. Soit H un hyperplan de E . Alors $\dim(H) = n - 1$. Soit $e \in E$ tel que $e \notin H$. Alors $E = H \oplus \text{Vect}(e)$. On définit $\varphi : E \rightarrow K$ par

$$\varphi(h + \lambda e) = \lambda$$

pour tout $h \in H$ et $\lambda \in K$. Alors φ est une forme linéaire non nulle et $\ker(\varphi) = H$.

Exercice 0.3. Soient $\varphi, \psi \in E^*$ deux formes linéaires non nulles. Montrer que

$$\ker(\varphi) = \ker(\psi) \iff \exists \lambda \in K^* \text{ tel que } \psi = \lambda\varphi$$

Solution 0.3. ($\Leftarrow$) Si $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda \neq 0$, alors $\ker(\psi) = \ker(\varphi)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$. Soit $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Alors pour tout $x \in E$, on a

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0 \right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0$$

Le premier terme est dans $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$, donc

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\psi(x_0)$$

Ainsi $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$.

Exercice 0.4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Montrer que pour tout $x \in E$, on a

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$$

Solution 0.4. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\langle x, e_j^* \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j^* \rangle = x_j$$

car $\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij}$. Donc $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$.

Exercice 0.5. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

où $F^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$.

Solution 0.5. On considère l'application $\Phi : E^* \rightarrow F^*$ définie par $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$. Alors $\ker(\Phi) = F^\perp$ et Φ est surjective d'après le théorème de prolongement des formes linéaires. Donc

$$\dim(E^*) = \dim(\ker(\Phi)) + \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) = \dim(F^\perp) + \dim(F^*)$$

Comme $\dim(E^*) = \dim(E)$ et $\dim(F^*) = \dim(F)$, on a $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.

Exercice 0.6. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$. Montrer que

$$x \in F \iff \forall \varphi \in F^\perp, \varphi(x) = 0$$

Solution 0.6. ($\Rightarrow$) Si $x \in F$, alors pour tout $\varphi \in F^\perp$, on a $\varphi(x) = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout $\varphi \in F^\perp$, on a $\varphi(x) = 0$. Si $x \notin F$, alors il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi|_F = 0$ et $\varphi(x) = 1$ (par le théorème de prolongement). Alors $\varphi \in F^\perp$ et $\varphi(x) = 1$, contradiction. Donc $x \in F$.

Exercice 0.7. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$$

Solution 0.7. Soit $\varphi \in \operatorname{Im}({}^t u)$. Alors il existe $\psi \in E^*$ tel que $\varphi = {}^t u(\psi) = \psi \circ u$. Pour tout $x \in \ker(u)$, on a $\varphi(x) = \psi(u(x)) = \psi(0) = 0$. Donc $\varphi \in (\ker(u))^\perp$.

Réciproquement, soit $\varphi \in (\ker(u))^\perp$. On veut montrer qu'il existe $\psi \in E^*$ tel que $\varphi = \psi \circ u$. On définit ψ sur $\operatorname{Im}(u)$ par $\psi(u(x)) = \varphi(x)$. Cette définition est bien définie car si $u(x) = u(y)$, alors $x - y \in \ker(u)$, donc $\varphi(x - y) = 0$, d'où $\varphi(x) = \varphi(y)$. On prolonge ψ à E tout entier par le théorème de prolongement. Alors $\varphi = \psi \circ u = {}^t u(\psi)$.

Exercice 0.8. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{rg}({}^t u) = \operatorname{rg}(u)$$

Solution 0.8. D'après l'exercice précédent, $\operatorname{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$. Donc

$$\operatorname{rg}({}^t u) = \dim(\operatorname{Im}({}^t u)) = \dim((\ker(u))^\perp) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \operatorname{rg}(u)$$

Chapitre 4: Formes Multilinéaires - Déterminants

Exercice 0.9. Soit E un K -espace vectoriel de dimension 2. Soit f une forme bilinéaire alternée sur E . Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$f(x, y) = f(e_1, e_2) \det_{\beta}(x, y)$$

où $\beta = (e_1, e_2)$ est une base de E .

Solution 0.9. Soient $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$. Alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + x_2y_1f(e_2, e_1) + x_2y_2f(e_2, e_2) \end{aligned}$$

Comme f est alternée, $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$. Donc

$$f(x, y) = f(e_1, e_2)(x_1y_2 - x_2y_1) = f(e_1, e_2) \det_{\beta}(x, y)$$

Exercice 0.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Solution 0.10. Soit $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. On a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Si $\sigma \neq \text{Id}$, alors il existe k tel que $\sigma(k) > k$ ou $\sigma(k) < k$. Dans tous les cas, le produit $a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ contient un facteur nul car $a_{ij} = 0$ pour $i > j$. Donc seuls les termes avec $\sigma = \text{Id}$ subsistent, d'où $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Exercice 0.11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\det(A) = \det({}^tA)$.

Solution 0.11. On a

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

En posant $\tau = \sigma^{-1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \cdots a_{\tau(n),n} \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

car $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$.

Exercice 0.12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice inversible. Montrer que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Solution 0.12. On a $AA^{-1} = I_n$, donc $\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$. D'après la multiplicativité du déterminant, $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. Comme $\det(A) \neq 0$ (car A est inversible), on a $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Exercice 0.13. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Solution 0.13. C'est la propriété fondamentale de la multiplicativité du déterminant. On peut le démontrer en considérant les colonnes de $B = (b_1, \dots, b_n)$ et en utilisant la multilinéarité du déterminant par rapport aux colonnes de $AB = (Ab_1, \dots, Ab_n)$.

Exercice 0.14. Calculer le déterminant de Vandermonde

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Solution 0.14. On a

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Démonstration par récurrence : pour $n = 2$, $V(a_1, a_2) = a_2 - a_1$. Supposons la formule vraie pour $n - 1$. En développant par rapport à la dernière ligne, on obtient un polynôme en X de degré $n - 1$ qui s'annule en $a_1, \dots, a_{n-1}$. Donc

$$V(a_1, \dots, a_{n-1}, X) = C \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$$

Le coefficient C est $V(a_1, \dots, a_{n-1})$. D'où le résultat.

Exercice 0.15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice de rang r . Montrer qu'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(K)$ et $Q \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution 0.15. Soit u l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A . Alors $\text{rg}(u) = r$, donc $\dim(\text{Im}(u)) = r$ et $\dim(\ker(u)) = n - r$.

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(u)$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, soit $v_i \in K^n$ tel que $u(v_i) = e_i$. Alors $(v_1, \dots, v_r)$ est libre.

Soit $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ une base de $\ker(u)$. Alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de K^n . Soit $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base d'un supplémentaire de $\text{Im}(u)$.

La matrice de u dans les bases $(v_1, \dots, v_n)$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices de changement de base sont P et Q .

Exercice 0.16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\text{rg}(A) = r$ si et seulement si il existe un mineur d'ordre r non nul et tous les mineurs d'ordre $r + 1$ sont nuls.

Solution 0.16. D'après l'exercice précédent, $\text{rg}(A) = r$ si et seulement si A est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de la sous-matrice formée par les r premières lignes et colonnes est $1 \neq 0$. Tout mineur d'ordre $r + 1$ est nul car la matrice a r colonnes non nulles. Les matrices équivalentes ont les mêmes mineurs non nuls (à un facteur non nul près). Donc la propriété est caractérisée par l'existence d'un mineur d'ordre r non nul et l'annulation de tous les mineurs d'ordre $r + 1$.

Exercice 0.17. Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\text{com}(A)$ sa comatrice. Montrer que

$$A \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = \det(A) I_n$$

Solution 0.17. Soit $C = \text{com}(A)^T = (\text{cof}(A)_{ij})$. On a $\text{cof}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ji}$ où Δ_{ji} est le mineur obtenu en supprimant la j -ème ligne et la i -ème colonne.

Le coefficient (i, j) de AC est

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+j} \Delta_{jk}$$

Si $i = j$, c'est le développement de $\det(A)$ suivant la i -ème ligne, donc $\det(A)$. Si $i \neq j$, c'est le développement du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j -ème ligne par la i -ème ligne, qui est nul car deux lignes sont identiques. Donc $AC = \det(A) I_n$.

Exercice 0.18. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ inversible. Montrer que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T$$

Solution 0.18. D'après l'exercice précédent, $A \text{com}(A)^T = \det(A) I_n$. Comme $\det(A) \neq 0$, on a

$$A \left(\frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T \right) = I_n$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A)^T$.