

TD: Espaces Vectoriels - Applications Linéaires et Matrices

Exercices avec solutions détaillées

Chapitre 1: Espaces Vectoriels

Exercice 0.1. On munit $\mathbb{R}_+^*$ de la loi interne notée $\oplus$ et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \quad x \oplus y = xy$$

et d'une loi externe définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lambda \cdot x = x^\lambda$$

Montrer que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Solution 0.1. On sait que $\mathbb{R}_+^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif et comme la loi $\oplus$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, par $x \oplus y = xy$, alors $(\mathbb{R}_+^*, \oplus)$ est un groupe commutatif. La loi externe sur $\mathbb{R}_+^*$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par $\lambda \cdot x = x^\lambda$, donc on a

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 \cdot x = x^1 = x$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lambda \cdot (x \oplus y) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = x^\lambda \oplus y^\lambda = \lambda \cdot x \oplus \lambda \cdot y$$

3. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\alpha + \beta) \cdot x = x^{\alpha + \beta} = x^\alpha x^\beta = (\alpha \cdot x) \oplus (\beta \cdot x)$$

4. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$(\alpha\beta) \cdot x = x^{\alpha\beta} = (x^\beta)^\alpha = \alpha \cdot (x^\beta) = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$$

Ainsi, on voit que $(\mathbb{R}_+^*, \oplus, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Exercice 0.2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On munit $(E^2, +)$ de la loi externe suivante,

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times E^2 &\rightarrow E^2 \\ (\lambda, (x, y)) &\mapsto \lambda \cdot (x, y) \end{aligned}$$

où pour $\lambda = a + ib$, on a $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$. Montrer que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Solution 0.2. E est $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, donc $(E, +)$ est un groupe commutatif, par suite E^2 muni de la loi produit est un groupe commutatif.

La loi externe sur E^2 est définie pour $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = a + ib$, et $(x, y) \in E^2$, par $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, donc on a

1. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $1 \cdot (x, y) = (x, y)$, car $1 = 1 + i0$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, avec $\lambda = a + ib$, et pour tout $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\lambda \cdot ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \lambda \cdot (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (a(x_1 + x_2) - b(y_1 + y_2), b(x_1 + x_2) + a(y_1 + y_2)) \\ &= (ax_1 - by_1, bx_1 + ay_1) + (ax_2 - by_2, bx_2 + ay_2) \\ &= \lambda \cdot (x_1, y_1) + \lambda \cdot (x_2, y_2)\end{aligned}$$

3. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, et pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot (x, y) &= ((a + c)x - (b + d)y, (b + d)x + (a + c)y) \\ &= (ax - by, bx + ay) + (cx - dy, dx + cy) \\ &= \alpha \cdot (x, y) + \beta \cdot (x, y)\end{aligned}$$

4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, avec $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, et soit $(x, y) \in E^2$. Comme $\alpha\beta = (ac - bd) + i(ad + bc)$, alors on a

$$\begin{aligned}(\alpha\beta) \cdot (x, y) &= ((ac - bd)x - (ad + bc)y, (ad + bc)x + (ac - bd)y) \\ &= (a(cx - dy) - b(dx + cy), b(cx - dy) + a(dx + cy)) \\ &= \alpha \cdot (cx - dy, dx + cy) = \alpha \cdot (\beta \cdot (x, y))\end{aligned}$$

On voit alors que $(E^2, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Exercice 0.3. Soient $(E, +)$ un groupe commutatif et p un nombre premier. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que E soit un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel.

Solution 0.3. Supposons que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, alors en particulier, pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, on a $\bar{0} \cdot x = 0_E$. Or, on a $\bar{0} = \overline{p} = \overline{1 + 1 + \dots + 1}$ (p fois), avec

$$(\overline{1 + 1 + \dots + 1}) \cdot x = px$$

Comme p est premier, alors tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, est d'ordre p dans le groupe $(E, +)$.

Réciproquement, supposons que tout élément non nul de E est d'ordre p et montrons que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. Pour cela, pour tout $(\bar{m}, x) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times E$ on fait correspondre $\bar{m} \cdot x = mx$, alors cette correspondance définit bien une application. En effet, si $\bar{m} = \bar{n}$, alors p divise $m - n$ et comme $px = 0$, alors $(m - n)x = 0$, donc $mx = nx$, par suite, on a $\bar{m} \cdot x = \bar{n} \cdot x$. On a donc une loi externe sur E vérifiant les axiomes suivants :

1. Pour tout $x \in E$, on a $\bar{1} \cdot x = 1x = x$.

2. Pour tout $\bar{m} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour tout $x, y \in E$, on a

$$\bar{m} \cdot (x + y) = m(x + y) = mx + my = \bar{m} \cdot x + \bar{m} \cdot y$$

3. Pour tout $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in E$, on a

$$(\bar{m} \times \bar{n}) \cdot x = \overline{mn} \cdot x = (mn)x = m(nx) = \bar{m} \cdot (\bar{n} \cdot x)$$

4. Pour tout $\bar{m}, \bar{n} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et pour tout $x \in E$, on a

$$(\bar{m} + \bar{n}) \cdot x = \overline{m+n} \cdot x = (m+n)x = mx + nx = \bar{m} \cdot x + \bar{n} \cdot x$$

On en déduit donc que E est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -espace vectoriel.

Exercice 0.4. Soit $F = \{(x, y, z) \in K^3, (K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})\}$, tels que

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0$$

Est-ce que F est un sous-espace vectoriel de K^3 ?

Solution 0.4. Soit $F = \{(x, y, z) \in K^3 : x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0\}$.

On a $(2, i, -i) \in F$ et $(2, -i, i) \in F$, mais $(2, i, -i) + (2, -i, i) = (4, 0, 0)$, avec $(4, 0, 0) \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$.

Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, on remarque d'abord que

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = (x + y + z)^2 + (y - z)^2$$

Donc, on aura

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz = 0 \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Donc dans ce cas, on voit facilement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 0.5. Soient E un K -espace vectoriel, F , G et H trois sous-espaces vectoriels de E .

1. Montrer que

$$H \subseteq F \cup G \implies H \subseteq F \text{ ou } H \subseteq G$$

2. Comparer les sous-espaces vectoriels suivants :

(a) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

(b) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

3. Montrer que

$$F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$$

4. Montrer que

$$G \subseteq F \implies [F \cap (G + H) = G + (F \cap H)]$$

Solution 0.5. 1. Montrons que si $H \subseteq F \cup G$ alors $H \subseteq F$ ou $H \subseteq G$. Supposons par l'absurde que $H \subseteq F \cup G$ et que $H \not\subseteq F$ et $H \not\subseteq G$, donc il existe $x \in H$ tel que $x \notin F$ et il existe $y \in H$, tel que $y \notin G$.

On a $x, y \in H$, $H \subseteq F \cup G$, $x \notin F$ et $y \notin G$, donc $x \in G$ et $y \in F$. Comme H est un sous-espace vectoriel, alors $x + y \in H$, donc $x + y \in F$ ou $x + y \in G$. Si $x + y \in F$, puisque $y \in F$, on aura $x \in F$ ce qui est absurde, car $x \notin F$. Si $x + y \in G$ on voit de la même manière que $y \in G$ ce qui est absurde. Donc on a $H \subseteq F$ ou $H \subseteq G$.

2. (a) Il est clair qu'on a toujours $F \cap G + F \cap H \subseteq F \cap (G + H)$, par contre l'inclusion réciproque n'est pas toujours vraie. Par exemple, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(e_1 + e_2)$, $G = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $H = \text{Vect}(e_2, e_3)$, alors on $F \cap (G + H) = F$ et $F \cap G + F \cap H = \{0\} + \{0\} = \{0\}$.
- (b) On a $F \subseteq (F + G) \cap (F + H)$ et $G \cap H \subseteq (F + G) \cap (F + H)$, donc $F + G \cap H \subseteq (F + G) \cap (F + H)$. Cependant, l'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie, par exemple, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on pose $F = \text{Vect}(e_1)$, $G = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et $H = \text{Vect}(e_2)$, alors il est facile de voir que $F + G \cap H = \text{Vect}(e_1)$ et $(F + G) \cap (F + H) = \text{Vect}(e_1, e_2)$.
3. Montrons que $F \cap (G + F \cap H) = (F \cap G) + (F \cap H)$. On a $F \cap G \subseteq F$ et $F \cap H \subseteq F$, donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F$, on a aussi $F \cap G \subseteq G$, donc $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq G + (F \cap H)$, par suite, on a $(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + F \cap H)$.
- Réciproquement, soit $x \in F \cap (G + F \cap H)$, alors $x \in F$ et $x = y + z$, avec $y \in G$ et $z \in F \cap H$, donc $x - z \in G$ et on a aussi $x - z \in F$, par conséquent, on a $x - z \in F \cap G$ et comme $z \in F \cap H$, alors $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$.
4. Montrons que si $G \subseteq F$, alors $F \cap (G + H) = G + F \cap H$.
- On a $G \subseteq F$ et $F \cap H \subseteq F$, donc $G + F \cap H \subseteq F$, on a aussi $F \cap H \subseteq H$, donc $G + F \cap H \subseteq G + H$, par suite, on a $G + F \cap H \subseteq F \cap (G + H)$.
- Réciproquement, soit $x \in F \cap (G + H)$, donc $x \in F$ et $x = y + z$, avec $y \in G$ et $z \in H$. Comme $G \subseteq F$ et $y \in G$, alors $x - y \in F$, donc $z \in F \cap H$, par suite $x \in G + F \cap H$.

Exercice 0.6. Soient E , F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0\}$$

$$F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = 0\}$$

$$G = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0\}$$

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E et que $E = F \oplus G$.

Solution 0.6. Il est facile de voir que E , F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donc il suffit de montrer que $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$.

Soit $u \in F$, alors on a $u_{n+1} + u_n = 0$, donc

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = -2u_{n+1} - 2u_n = -2(u_{n+1} + u_n) = 0$$

donc $u \in E$.

Soit $u \in G$, alors on a $u_{n+1} = 2u_n$, donc

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = u_{n+1} - 2u_n = 0$$

donc $u \in E$.

Ainsi, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .

Soit $u \in F \cap G$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = -u_n$ et $u_{n+1} = 2u_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 0$, par suite, $u = 0$, donc $F \cap G = \{0\}$.

Soit $u \in E$ et soient v et w les suites définies par $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ et $w_n = u_{n+1} + u_n$. Puisque $u \in E$, alors on a $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, donc on a

$$v_{n+1} + v_n = (u_{n+2} - 2u_{n+1}) + (u_{n+1} - 2u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

et on a aussi

$$w_{n+1} - 2w_n = (u_{n+2} + u_{n+1}) - 2(u_{n+1} + u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$$

Il en résulte donc que $v \in F$, $w \in G$ et $u = -\frac{1}{3}v + \frac{1}{3}w$, donc $u \in F + G$ et par suite $E = F + G$.

Ainsi, $E = F \oplus G$.

Exercice 0.7. Soient E un K -espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , tels que $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \dots \subsetneq F_n$. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, soit G_j un supplémentaire de F_j dans F_{j+1} . Montrer que la somme $G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}$ est directe et que $G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1}$ est un supplémentaire de F_1 dans E .

Solution 0.7. Montrons que la somme $G_1 + G_2 + \dots + G_{n-1}$ est directe.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in G_1 \times G_2 \times \dots \times G_{n-1}$, tel que $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0$, on doit montrer que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

On a $x_1, \dots, x_{n-2} \in F_{n-1}$, car $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_{n-1}$, et comme $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0$, alors $x_{n-1} \in F_{n-1}$, donc $x_{n-1} \in F_{n-1} \cap G_{n-1}$, avec $F_{n-1} \cap G_{n-1} = \{0\}$, donc $x_{n-1} = 0$.

Par suite, on a $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} = 0$, donc de la même manière on montre que $x_{n-2} = 0$. Ainsi, par induction, on montre que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$.

Puisque pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $F_{i+1} = F_i \oplus G_i$, alors on a

$$\begin{aligned} F_1 \oplus G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1} &= F_2 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_{n-1} \\ &= F_3 \oplus G_3 \oplus \dots \oplus G_{n-1} \\ &\vdots \\ &= F_{n-1} \oplus G_{n-1} = F_n = E \end{aligned}$$

Exercice 0.8. Soient E un K -espace vectoriel, A et B deux parties quelconques de E . Comparer les parties de E suivantes :

1. $\text{Vect}(A \cap B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.
2. $\text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$.
3. $\text{Vect}(A \cup B)$ et $\text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Solution 0.8. 1. On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$, donc $\text{Vect}(A \cap B) \subseteq \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$.

L'inclusion dans l'autre sens n'est pas toujours vraie, par exemple, soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $A = \{e_1, e_2\}$ et $B = \{e_1 + e_2, e_3\}$, alors on a $A \cap B = \emptyset$, donc $\text{Vect}(A \cap B) = \{0\}$ et on a $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B) = \text{Vect}(e_1 + e_2)$.

2. On a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$, donc $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A \cup B)$. L'inclusion réciproque est vraie, si et seulement si, $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$ ou $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$. En effet, supposons que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$, alors $\text{Vect}(A) \cup \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel, donc $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$ ou $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$. Réciproquement, supposons, par exemple, que $\text{Vect}(B) \subseteq \text{Vect}(A)$, alors on a $A \cup B \subseteq \text{Vect}(A)$, donc $\text{Vect}(A \cup B) \subseteq \text{Vect}(A)$.

3. On a $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Exercice 0.9. Soit E un K -espace vectoriel, ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soient L_1 et L_2 les parties de E définies par

$$L_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{et} \quad L_2 = \{x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1\}$$

Montrer que

1. Si n est pair, alors L_2 est liée.

2. Si n est impair, alors

$$L_1 \text{ est libre} \iff L_2 \text{ est libre}$$

Solution 0.9. 1. On suppose n pair, avec $n = 2p$, on pose $v_k = x_k + x_{k+1}$ pour $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ et $v_n = x_n + x_1$, alors on a

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2p-1} + x_{2p}) - (x_{2p} + x_1) = 0$$

Donc $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est lié, par suite L_2 est lié.

2. On suppose que n est impair, avec $n = 2p + 1$, et que L_1 est libre. Pour montrer que L_2 est libre, soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tel que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

on doit alors montrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Pour cela, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k (x_k + x_{k+1}) + \alpha_n (x_n + x_1) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_n) x_1 + \sum_{k=2}^n (\alpha_{k-1} + \alpha_k) x_k \end{aligned}$$

Puisque L_1 est libre, alors on aura

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_{2p+1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{2p} + \alpha_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

On voit alors que $(1) + (2) - (3) + \dots + (2p) - (2p+1) = 2\alpha_1$, donc $\alpha_1 = 0$, par suite, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Réciproquement, supposons que L_2 est libre et montrons que L_1 est libre. Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, tel que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$.

On a

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} v_k = (x_1 + x_2) - (x_2 + x_3) + \dots + (x_{2p+1} + x_1) = 2x_1$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - \cdots - v_{2p} + v_{2p+1}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - \cdots + v_{2p} - v_{2p+1}) \\ x_3 = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + \cdots - v_{2p} + v_{2p+1}) \\ \vdots \\ x_{2p} = \frac{1}{2}(v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots + v_{2p-1} + v_{2p} - v_{2p+1}) \\ x_{2p+1} = \frac{1}{2}(-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 - \cdots - v_{2p-1} + v_{2p} + v_{2p+1}) \end{cases}$$

On a $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, donc en substituant les x_i à leurs valeurs et tenant compte que L_2 est libre, on aura $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exercice 0.10. Soient $P_0, P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $K[X]$, tel que $\deg(P_k) = k$, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Montrer que $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est libre.

Solution 0.10. Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, tel que

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0$$

on doit montrer que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $P_k = a_{0,k} + a_{1,k}X + \cdots + a_{k,k}X^k$, avec $a_{k,k} \neq 0$, alors on a $P_k^{(k)} = k!a_{k,k}$ et $P_k^{(j)} = 0$, pour $j \geq k+1$, donc on a

$$\begin{aligned} \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_n P_n = 0 &\implies (\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1})^{(n)} = 0 \\ &\implies n!a_{n,n}\alpha_n = 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha_n = 0$, car $a_{n,n} \neq 0$, donc on a $\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0$, par suite, on a aussi

$$\begin{aligned} \alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1} = 0 &\implies (\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_{n-1} P_{n-1})^{(n-1)} = 0 \\ &\implies (n-1)!a_{n-1,n-1}\alpha_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

donc $\alpha_{n-1} = 0$, car $a_{n-1,n-1} \neq 0$. Ainsi, par induction, on montre que $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Exercice 0.11. Soit K un corps commutatif, P un polynôme non nul de $K[X]$ et (P) l'idéal engendré par P . Montrer que $K[X]/(P)$ est un K -espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.

Solution 0.11. Soit $A \in K[X]/(P)$, en effectuant la division euclidienne de A par P , on aura $A = QP + R$, avec $\deg(R) < \deg(P)$. On a $QP \in (P)$, donc $\overline{QP} = 0$, par suite, on a $\overline{A} = \overline{R}$. Si on suppose $\deg(P) = n$, alors $\deg(R) \leq n-1$, par suite, il existe $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, tel que $R = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$, donc

$$\overline{A} = \alpha_0 \overline{1} + \alpha_1 \overline{X} + \cdots + \alpha_{n-1} \overline{X}^{n-1}$$

On voit donc que $\{\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{n-1}\}$ est une partie génératrice finie de $K[X]/(P)$, donc $K[X]/(P)$ est de dimension finie.

Soit $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in K$, tel que

$$\alpha_0 \overline{1} + \alpha_1 \overline{X} + \cdots + \alpha_{n-1} \overline{X}^{n-1} = 0$$

On pose $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$, alors on a $\overline{Q} = 0$, donc $Q \in (P)$, par suite, P divise Q , avec $\deg(Q) < \deg(P)$, donc $Q = 0$, par conséquent, on a $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$.

On voit donc que $(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X}^{n-1})$ est une base de $K[X]/(P)$, donc $\dim(K[X]/(P)) = n = \deg(P)$.

Chapitre 2: Applications Linéaires - Matrices

Exercice 0.12. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n , $F_1, F_2, \dots, F_k$ des sous-espaces vectoriels de E , avec $k \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^k \dim(F_j) > n(k-1) \implies \bigcap_{j=1}^k F_j \neq \{0\}$$

Solution 0.12. On considère l'application $f : E \rightarrow E/F_1 \times E/F_2 \times \dots \times E/F_k$ définie pour tout $x \in E$, par $f(x) = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x})$, alors il est clair que f est linéaire et que $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^k F_i$. Pour conclure, il suffit de montrer que f n'est pas injective.

Pour cela, comme

$$\dim(E/F_1 \times E/F_2 \times \dots \times E/F_k) = nk - \sum_{i=1}^k \dim(F_i)$$

et comme $\sum_{i=1}^k \dim(F_i) > n(k-1)$, alors $\dim(E/F_1 \times E/F_2 \times \dots \times E/F_k) < n$, ce qui justifie que f n'est pas injective.

Exercice 0.13. Montrer que pour tout $Q \in K_n[X]$, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, il existe un unique $P \in K_n[X]$, tel que

$$Q = P + P' + \dots + P^{(n-1)}$$

Solution 0.13. On considère l'application $f : K_n[X] \rightarrow K_n[X]$, définie pour tout $P \in K_n[X]$, par

$$f(P) = P + P' + \dots + P^{(n-1)}$$

alors il est clair que f est linéaire et que $\ker(f) = \{0\}$, donc f est injective. Comme $K_n[X]$ est de dimension finie, alors f est bijective, donc pour tout $Q \in K_n[X]$, il existe un unique $P \in K_n[X]$, tel que $Q = f(P) = P + P' + \dots + P^{(n-1)}$.

Exercice 0.14. On considère le corps $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. Trouver une base de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tout endomorphisme f de $\mathbb{C}$, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
3. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{C}$.

Solution 0.14. 1. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$, c'est la base canonique de $\mathbb{C}$.

2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}$. On pose

$$a = \frac{if(1) + f(i)}{2i} \quad \text{et} \quad b = \frac{if(1) - f(i)}{2i}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $z = x + iy$, alors on a

$$f(z) = xf(1) + yf(i) = x(a + b) + yi(a - b) = az + b\bar{z}$$

3. f est un automorphisme, si et seulement si, $\ker(f) = \{0\}$. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $f(z) = 0$, alors on a $az + b\bar{z} = 0$, donc on a aussi $bz + a\bar{z} = 0$. En multipliant la première équation par a et la deuxième par b et faisant la différence, on obtient $(|a|^2 - |b|^2)z = 0$, donc si $|a| \neq |b|$, alors $z = 0$, donc f est injective.

Réciproquement, supposons que f n'est pas injective et montrons que $|a| = |b|$. Si $f(i) = 0$, alors $a = b$, donc $|a| = |b|$, si $f(i) \neq 0$, puisque f est non injective, alors $(f(1), f(i))$ est lié, donc $\frac{f(1)}{f(i)} \in \mathbb{R}$, par suite, on a $f(1)f(i) = \overline{f(1)}f(i)$.

On a alors $-i(a+b)(a-b) = i(\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b})$, donc en développant, on obtient $|a|^2 - |b|^2 = 0$, ce qui donne $|a| = |b|$.

Exercice 0.15. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A , par rapport à la base canonique, est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m-2 & 2-m & 1 \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre réel.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de u .
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles u est diagonalisable.
3. On suppose que $m = 2$.
 - (a) Trouver une matrice inversible P et une matrice diagonalisable D , tel que $A = PDP^{-1}$.
 - (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n .
4. On suppose que $m = 1$. Trouver une base de Jordan de u puis résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

Solution 0.15. 1. Un calcul simple donne $\chi_u = (X-1)(X-2)(X-m)$.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, alors χ_u n'a que des racines simples, donc u est diagonalisable.

Si $m = 1$, alors 1 est une racine double, donc u est diagonalisable, si et seulement si, $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$. On vérifie facilement que $(A - I_n)(A - 2I_n) \neq 0$, donc pour $m = 1$, u n'est pas diagonalisable.

Si $m = 2$ alors 2 est une racine double, donc u est diagonalisable, si et seulement si, $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$. On vérifie facilement que $(A - I_n)(A - 2I_n) = 0$, donc pour $m = 2$, u est diagonalisable.

3. (a) Soit E_1 et E_2 les sous-espaces propres correspondants aux valeurs propres 1 et 2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et soit $x \in \mathbb{R}^3$, avec $x = ae_1 + be_2 + ce_3$, alors on a

$$x \in E_1 \iff (u - \text{Id}_E)(x) = 0 \iff c = 0 \text{ et } -a + b = 0 \iff x = a(e_1 + e_2)$$

$$x \in E_2 \iff (u - 2\text{Id}_E)(x) = 0 \iff -a + c = 0 \iff x = a(e_1 + e_3) + be_2$$

donc $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2)$.

On pose $v_1 = e_1 + e_2$, $v_2 = e_1 + e_3$ et $v_3 = e_2$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de u . Soit P la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (v_1, v_2, v_3) , alors on a $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On a $A = PDP^{-1}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. En faisant le calcul on trouve

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Si $m = 1$, alors en faisant le calcul, on trouve $E_1 = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_1 + e_3)$. Pour jordaniser u on doit trouver un vecteur x_0 , tel que $(u - \text{Id}_E)(x_0) \neq 0$ et $(u - \text{Id}_E)^2(x_0) = 0$. Pour cela, on remarque que si $x_0 = e_3$, alors on aura le résultat. On pose alors $v_1 = (u - \text{Id}_E)(e_3) = e_1 + e_2$, $v_2 = e_3$ et $v_3 = e_1 + e_3$, alors (v_1, v_2, v_3) est une base de Jordan de u et on a $A = PJP^{-1}$, avec

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la résolution du système (S) défini par

$$\begin{cases} x' = x + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = -x - y + z \end{cases}$$

on pose $V = xe_1 + ye_2 + ze_3$ et $W = P^{-1}V = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$, alors on aura

$$\frac{dW}{dt} = P^{-1} \frac{dV}{dt} = P^{-1}AV = (P^{-1}AP)W = JW$$

On obtient alors le système suivant

$$\begin{cases} X' = X + Y \\ Y' = Y \\ Z' = 2Z \end{cases}$$

dont la solution est donnée par $X = (C_1 + C_2t)e^t$, $Y = C_2e^t$ et $Z = C_3e^{2t}$, donc la solution générale de (S) est définie par

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 + C_2t)e^t + C_3e^{2t} \\ y(t) = C_2e^t + C_3e^{2t} \\ z(t) = C_2e^t + C_3e^{2t} \end{cases}$$

Exercice 0.16. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E , tels que $u \circ v = 0$ et $u + v \in GL(E)$. Montrer que $\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E)$.

Solution 0.16. On a $u \circ v = 0$, donc $\text{Im}(v) \subseteq \ker(u)$. Comme $\ker(u + v) = \{0\}$, alors on a $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$, or on a

$$\dim(\ker(u)) = \dim(v(\ker(u))) + \dim(\ker(u) \cap \ker(v))$$

par suite, on a $\dim(\ker(u)) = \dim(v(\ker(u)))$ et comme $v(\ker(u)) \subseteq \ker(u)$, alors $\ker(u) = v(\ker(u))$, avec $v(\ker(u)) \subseteq \text{Im}(v)$, donc on a $\ker(u) = \text{Im}(v)$.

On en déduit donc que

$$\text{rg}(u) + \text{rg}(v) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(v)) = \dim(E)$$

Exercice 0.17. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E . Montrer que

1. $\dim(\ker(u + v)) \leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$.
2. $\dim(\ker(u \circ v)) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.

Solution 0.17. 1. Soit $w : \ker(u + v) \rightarrow E$ la restriction de u à $\ker(u + v)$, alors on a $\ker(w) = \ker(u) \cap \ker(u + v) = \ker(u) \cap \ker(v)$. Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker(u + v)$, tel que $y = w(x) = u(x)$, on a $(u + v)(x) = 0$, donc $u(x) = -v(x)$, par suite, on a $u(x) \in \text{Im}(v)$. Donc on a $\text{Im}(w) \subseteq u^{-1}(\text{Im}(v))$.

Or, on a $u(u^{-1}(\text{Im}(v))) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)$, donc d'après le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u + v)) &= \dim(\ker(w)) + \dim(\text{Im}(w)) \\ &\leq \dim(\ker(u) \cap \ker(v)) + \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v)) \end{aligned}$$

2. Soit $w : \ker(u \circ v) \rightarrow E$ la restriction de v à $\ker(u \circ v)$, alors on a $\ker(w) = \ker(v) \cap \ker(u \circ v) = \ker(v)$. Soit $y \in \text{Im}(w)$, alors il existe $x \in \ker(u \circ v)$, tel que $y = v(x)$, avec $u(v(x)) = 0$, donc $x \in v^{-1}(\ker(u))$, par suite $y \in v(v^{-1}(\ker(u)))$. Réciproquement, on voit facilement que si $y \in v(v^{-1}(\ker(u)))$, alors $y \in \text{Im}(w)$, donc $\text{Im}(w) = v(v^{-1}(\ker(u)))$.

On a $v(v^{-1}(\ker(u))) = \ker(u) \cap \text{Im}(v)$, donc $\dim(\text{Im}(w)) \leq \dim(\ker(u))$, par suite, d'après le théorème du rang, on a

$$\begin{aligned} \dim(\ker(u \circ v)) &= \dim(\ker(w)) + \dim(\text{Im}(w)) \\ &\leq \dim(\ker(v)) + \dim(\ker(u)) \end{aligned}$$

Exercice 0.18. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, E)$, tel que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g$$

Montrer que

1. $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$ et $F = \text{Im}(f) \oplus \ker(g)$.
2. $f, g, f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Solution 0.18. 1. Montrons que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ et $F = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(g)$.

Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{Im}(g)$, alors on a $f(y) = 0$ et $y = g(x)$, avec $x \in F$, donc on aura $(g \circ f \circ g)(x) = 0$, par suite, $g(x) = 0$, donc $y = 0$. D'où $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0\}$.

Soit $x \in E$, alors on a $f(x) = f((g \circ f)(x))$, donc $f(x - (g \circ f)(x)) = 0$, il en résulte que $x - g(f(x)) \in \ker(f)$, donc $x \in \ker(f) + \operatorname{Im}(g)$, donc $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(g)$.

Nous avons donc établi que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$ et comme f et g jouent un rôle symétrique, alors de la même manière on montre que $F = \operatorname{Im}(f) \oplus \ker(g)$.

2. D'après la question précédente, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(g)$ et d'après le théorème du rang, on a $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \operatorname{rg}(f)$, donc on a $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g)$.

On a $f \circ g \circ f = f$, donc $(f \circ g)(\operatorname{Im}(f)) = \operatorname{Im}(f)$, par suite, on a $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Im}(f \circ g)$ et comme $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im}(f)$, alors on a $\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)$.

De la même manière on montre que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$.

Exercice 0.19. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que u n'est pas diagonalisable.

Solution 0.19. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & -1 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 0 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^3$$

Donc 1 est la seule valeur propre de A . Si A était diagonalisable, alors A serait semblable à I_3 , donc $A = I_3$, ce qui est faux car $A \neq I_3$. Donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 0.20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) = 0$ implique $A = 0$.

Solution 0.20. Puisque A est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On a $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0$ et comme les λ_i sont des nombres complexes, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0$ n'implique pas nécessairement $\lambda_i = 0$ pour tout i . Mais on a aussi $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Cependant, pour des nombres complexes, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ n'impliquent pas que tous les λ_i sont nuls. Par exemple, pour $n = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, on a $\sum \lambda_i = 0$ et $\sum \lambda_i^2 = 2 \neq 0$.

Donc l'énoncé est faux en général. Contre-exemple : $A = \operatorname{diag}(1, -1)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable, $\operatorname{tr}(A) = 0$ mais $\operatorname{tr}(A^2) = 2 \neq 0$.

Si on ajoute la condition $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors par les identités de Newton, on obtient que tous les λ_i sont nuls, donc $A = 0$.