

TD: Formes Bilinéaires - Espaces Euclidiens - Hermitiens

Exercices avec solutions détaillées

Chapitre 7: Formes Bilinéaires Symétriques - Formes Quadratiques

Exercice 0.1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 6yz$$

Déterminer la matrice de q dans la base canonique.

Solution 0.1. La matrice symétrique de q est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

car $q(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^T$.

Exercice 0.2. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 6yz$$

Appliquer la méthode de Gauss pour décomposer q en somme de carrés.

Solution 0.2. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 + 6yz + 3z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz + 2y^2 + 6yz + 3z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 + y^2 + 2yz - z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

Donc $q(x, y, z) = (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 - 2z^2$.

Exercice 0.3. Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 12yz$$

Solution 0.3. On a

$$q(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$$

Donc le rang est 1 et la signature est $(1, 0)$.

Exercice 0.4. Déterminer le rang et la signature de la forme quadratique

$$q(x, y, z) = x^2 - 4y^2 - 9z^2 + 4xy - 6xz + 12yz$$

Solution 0.4. On a

$$q(x, y, z) = (x + 2y - 3z)^2 - 8y^2 - 18z^2 + 24yz = (x + 2y - 3z)^2 - 2(2y - 3z)^2$$

Donc le rang est 2 et la signature est $(1, 1)$.

Exercice 0.5. Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ de signature (p, q) . Montrer que $p + q = \text{rg}(q)$.

Solution 0.5. Par le théorème d'inertie de Sylvester, dans une base orthogonale, q s'écrit

$$q(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

Donc le rang est $p + q$.

Chapitre 8: Espaces Euclidiens

Exercice 0.6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Calculer la norme de $u = (1, 2, 3)$.

Solution 0.6. $\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Exercice 0.7. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, déterminer si les vecteurs $u = (1, 1, 0)$ et $v = (1, -1, 1)$ sont orthogonaux.

Solution 0.7. $\langle u, v \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0$. Donc u et v sont orthogonaux.

Exercice 0.8. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, normaliser le vecteur $u = (1, 2, 2)$.

Solution 0.8. $\|u\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$. Le vecteur normalisé est $v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Exercice 0.9. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Solution 0.9. On a :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$$

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 1, 2)$$

Chapitre 9: Endomorphismes d'un Espace Euclidien

Exercice 0.10. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Déterminer u^* .

Solution 0.10. Comme la base canonique est orthonormale, la matrice de u^* est $A^T = A$. Donc $u^* = u$.

Exercice 0.11. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que u est orthogonal.

Solution 0.11. On a $A^T A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I_2$. Donc A est orthogonale, donc u est orthogonal.

Exercice 0.12. Soit p la projection orthogonale sur le plan $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

Solution 0.12. Le vecteur normal au plan est $n = (1, 1, 1)$. La projection orthogonale sur P est $p(x) = x - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n$. Donc

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{3} (1, 1, 1) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

La matrice est

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chapitre 10: Formes Sesquilinéaires - Formes Quadratiques Hermitiennes

Exercice 0.13. Soit h la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ définie par

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 \overline{y_1} + 2x_1 \overline{y_2} + 2x_2 \overline{y_1} + 5x_2 \overline{y_2}$$

Déterminer la matrice de h dans la base canonique.

Solution 0.13. La matrice de h est $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, car $h(x, y) = x^T H \overline{y}$.

Exercice 0.14. Soit h la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ de matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer la forme quadratique hermitienne associée.

Solution 0.14. La forme quadratique hermitienne est

$$q(x) = h(x, x) = x^T H \overline{x} = x_1 \overline{x_1} + i x_1 \overline{x_2} - i x_2 \overline{x_1} + 2 x_2 \overline{x_2} = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 + i(x_1 \overline{x_2} - x_2 \overline{x_1})$$

Chapitre 11: Espaces Hermitiens

Exercice 0.15. Dans $\mathbb{C}^2$ muni du produit hermitien usuel, calculer $\langle (1, i), (i, -1) \rangle$.

Solution 0.15. $\langle (1, i), (i, -1) \rangle = 1 \cdot \bar{i} + i \cdot \overline{-1} = 1 \cdot (-i) + i \cdot (-1) = -i - i = -2i$.

Exercice 0.16. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que u est hermitien.

Solution 0.16. On a $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = A$. Donc A est hermitienne, donc u est hermitien.

Exercice 0.17. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. Montrer que u est unitaire.

Solution 0.17. On a $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Donc $A^*A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I_2$. Donc A est unitaire, donc u est unitaire.

Exercice 0.18. Montrer que toute valeur propre d'un endomorphisme hermitien est réelle.

Solution 0.18. Soit u un endomorphisme hermitien ($u^* = u$) et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre avec $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors

$$\lambda \|x\|^2 = \langle u(x), x \rangle = \langle x, u^*(x) \rangle = \langle x, u(x) \rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

Donc $\lambda = \overline{\lambda}$, donc $\lambda \in \mathbb{R}$.