

TD: Réduction des Endomorphismes - Applications

Exercices avec solutions détaillées

Chapitre 5: Réduction des Endomorphismes

Exercice 0.1. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P \in K[X]$ un polynôme non nul tel que $P(u) = 0$. Montrer que le polynôme minimal M_u divise P .

Solution 0.1. Par définition du polynôme minimal, M_u est le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $M_u(u) = 0$. Si $P(u) = 0$, alors en effectuant la division euclidienne de P par M_u , on a $P = QM_u + R$ avec $\deg(R) < \deg(M_u)$. En évaluant en u , on obtient $R(u) = 0$. Par minimalité de M_u , on a $R = 0$. Donc M_u divise P .

Exercice 0.2. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = u$. Déterminer le polynôme minimal de u .

Solution 0.2. On a $u^2 - u = 0$, donc $P(X) = X^2 - X = X(X - 1)$ annule u . Si $u = 0$, alors $M_u = X$. Si $u = \text{Id}_E$, alors $M_u = X - 1$. Si $u \neq 0$ et $u \neq \text{Id}_E$, alors $M_u = X^2 - X$.

Exercice 0.3. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Montrer que le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = X^n$ où $n = \dim(E)$.

Solution 0.3. Comme u est nilpotent, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^m = 0$. Alors M_u divise X^m , donc $M_u = X^p$ pour un certain $p \leq m$. Le polynôme caractéristique χ_u a les mêmes racines que M_u , donc la seule valeur propre possible est 0. Comme $\deg(\chi_u) = n$, on a $\chi_u(X) = X^n$.

Exercice 0.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice diagonalisable. Montrer que le polynôme minimal de A est scindé à racines simples.

Solution 0.4. Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(K)$ tel que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de A . Alors le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ annule A car $Q(D) = 0$. Donc M_A divise Q , qui est scindé à racines simples. Donc M_A est scindé à racines simples.

Exercice 0.5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice dont le polynôme minimal est scindé à racines simples. Montrer que A est diagonalisable.

Solution 0.5. Soit $M_A(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ avec λ_i distincts. Alors $M_A(A) = 0$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$K^n = \ker(A - \lambda_1 I) \oplus \ker(A - \lambda_2 I) \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_r I)$$

Donc K^n est somme directe des sous-espaces propres de A . Ainsi A est diagonalisable.

Exercice 0.6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice. Montrer que A est trigonalisable.

Solution 0.6. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. D'après le théorème de trigonalisation, A est trigonalisable.

Exercice 0.7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que A est semblable à une matrice de Jordan.

Solution 0.7. C'est le théorème de Jordan pour les endomorphismes nilpotents. On construit une base de Jordan en utilisant les sous-espaces $\ker(A^k)$.

Exercice 0.8. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est $\chi_A(X) = (X - 1)^3(X - 2)^2$. Déterminer les dimensions possibles des sous-espaces propres.

Solution 0.8. Soit $p = \dim(\ker(A - I))$ et $q = \dim(\ker(A - 2I))$. On a $1 \leq p \leq 3$ et $1 \leq q \leq 2$. Les dimensions possibles sont $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)$.

Chapitre 6: Applications de la Réduction

Exercice 0.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ converge.

Solution 0.9. Soit $\|A\|$ une norme matricielle. On a $\|A^k\| \leq \|A\|^k$. Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < +\infty$$

La série est absolument convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est complet, donc elle converge.

Exercice 0.10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice q . Calculer $\exp(A)$.

Solution 0.10. Comme $A^k = 0$ pour $k \geq q$, on a

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^{q-1}}{(q-1)!}$$

Exercice 0.11. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Solution 0.11. On utilise le produit de Cauchy des séries. Comme A et B commutent,

$$(A+B)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p}$$

Donc

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!} \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{B^q}{q!} \right) = \exp(A)\exp(B)$$

Exercice 0.12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$. Montrer que $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$.

Solution 0.12. On a $A^k = PD^k P^{-1}$. Donc

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{PD^k P^{-1}}{k!} = P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1} = P \exp(D) P^{-1}$$

Exercice 0.13. Résoudre le système différentiel $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solution 0.13. La matrice A est triangulaire supérieure, donc les valeurs propres sont 1 et 2. Les vecteurs propres correspondants sont $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = 1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour $\lambda = 2$. La solution générale est

$$X(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{2t} \\ C_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

Exercice 0.14. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Solution 0.14. L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, dont les racines sont $r = 1$ et $r = 2$. La solution générale est

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}$$

Exercice 0.15. Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Solution 0.15. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 5 = 0$, dont les racines sont $r = -1 \pm 2i$. La solution réelle générale est

$$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t))$$

Exercice 0.16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que $\exp(A)$ est symétrique définie positive.

Solution 0.16. Si A est symétrique, alors $A = PDP^T$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Alors

$$\exp(A) = P \exp(D) P^T$$

avec $\exp(D) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$. Cette matrice est symétrique et ses valeurs propres e^{λ_i} sont strictement positives, donc $\exp(A)$ est symétrique définie positive.